В. Н. КАСАТКИН

НЕОБЫЧНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИКИ

В. Н. КАСАТКИН

НЕОБЫЧНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИКИ

КИЕВ
„РАДЯНСЬКА ШКОЛА“
1987

22.1
К28

КАСАТКИН В. Н. Необычные задачи математики.— Киев: Рад. шк., 1987.— 128 с.

В книге с помощью системы занимательных задач раскрываются математические основы теории автоматов и рассматривается ее применение для решения задач, возникающих в различных областях науки, техники и производства. Значительное внимание уделяется алгебре логики и теории графов, овладение которыми неотъемлемо от успешного составления алгоритмов и программ для ЭВМ. Приводятся исторические сведения и краткие биографии ученых, чьи имена связаны с рассматриваемыми в книге вопросами. Издание иллюстрировано.
Предназначается учащимся старших классов средней школы.

Рецензенты: доктор физико-математических наук *О. В. Мантуров* (г. Москва) и кандидат физико-математических наук *М. М. Мурач* (г. Чернигов).

Оформление и рисунки художника *К. А. Правдина*.

$К\ \dfrac{4802020000-369}{М210(04)-87}\ 354-87$

ПРЕДИСЛОВИЕ

Математика служит людям, служит издавна и успешно. Потребности естествознания, техники, всей практической деятельности людей постоянно ставили перед математикой новые задачи и стимулировали ее развитие. В свою очередь прогресс в математике делал математические методы более эффективными, расширял сферу их применения и, тем самым, способствовал общему научно-техническому прогрессу.

Роль математики в различных областях человеческой деятельности в разное время была различной. Она складывалась исторически, и существенное влияние на нее оказывали два фактора: уровень развития математического аппарата и степень зрелости знаний об изучаемом объекте, возможность описать его наиболее существенные черты и свойства на языке математических понятий и уравнений или, как теперь принято говорить, возможность *построить математическую модель изучаемого объекта.*

Математическая модель, основанная на некотором упрощении, идеализации, не тождественна объекту, а является его приближенным описанием. Однако благодаря замене реального объекта соответствующей ему моделью появляется возможность сформулировать задачу его изучения как математическую и воспользоваться для анализа универсальным математическим аппаратом, который не зависит от конкретной природы объекта. Математика позволяет единообразно описать широкий круг фактов и наблюдений, провести их детальный количественный анализ, предсказать, как поведет себя объект в различных условиях, т. е. спрогнозировать результаты будущих наблюдений.

Сложность построения и исследования математической модели существенно зависит от сложности изучаемого объекта. Математические методы давно и весьма успешно применяются в механике, физике, астрономии, т. е. в науках, относящихся к разряду «точных». Математика стала их языком. Значительную роль играла и играет она также и в технике. Этим вплоть до недавнего времени исчерпывалась сфера широкого применения математических методов.

Ситуация резко изменилась с появлением в середине XX века электронно-вычислительных машин (ЭВМ). ЭВМ изменили подход к применению математики как метода исследования. Они вызвали переориентацию многих сложившихся направлений математики и развитие ряда новых.

Сегодня ЭВМ являются одним из определяющих факторов научно-технического прогресса. Их применение способствует ускорению развития ведущих отраслей народного хозяйства, открывает принципиально новые возможности проектирования сложных систем при значительном сокращении сроков их разработки и внедрения в производство, обеспечивает выбор оптимальных режимов производственно-технологических процессов, создает условия для совершенствования управления и повышения производительности труда.

Если обычные машины расширяют физические возможности людей в процессе трудовой деятельности, то ЭВМ являются их интеллектуальным помощником. Без ЭВМ не могли бы развиваться многие крупные научно-технические проекты (космические исследования, атомная энергетика, сверхзвуковая авиация и т. д.).

Благодаря ЭВМ идет интенсивный процесс математизации не только естественных и технических, но также и общественных наук; важное значение приобрело применение математических методов в экономике. Математическое моделирование начинает широко использоваться в химии, геологии, биологии, медицине, психологии, лингвистике. Применение ЭВМ существенно изменяет образ мышления и характер работы большинства специалистов. Компьютерная грамотность становится важнейшей составной частью общей образованности человека, которому предстоит вывести на передовые рубежи науки и техники все отрасли народного хозяйства страны, осуществить широкую автоматизацию производства и кардинально повысить производительность труда. Именно поэтому фундаментальным компонентом общего среднего образования становится новый предмет «Основы информатики и вычислительной техники». Появление в школе этого предмета, несомненно, вызовет и необходимость решать многие необычные для вас задачи. Ниже ведется рассказ о таких задачах, взятых из новых (пока новых) для школы разделов математики. Речь идет о задачах, для решения которых нужны знания о булевых функциях и сведения из теории графов. Через задачи вы познакомитесь с основными особенностями булевых алгебр, увидите их разнообразнейшие применения. Сведения из теории графов также переплетаются с рассказами о задачах, которые успешно решены благодаря хорошо разработанной соответствующей теории. Вы узнаете, что эти две ветви математики, возникшие по разным причинам и в далеко отстоящих друг от друга областях практики, сегодня оказались близкими друг другу и обогащают друг друга. Выяснится, что искусство программирования требует одновременного знания основ теории графов и сведений из булевой алгебры.

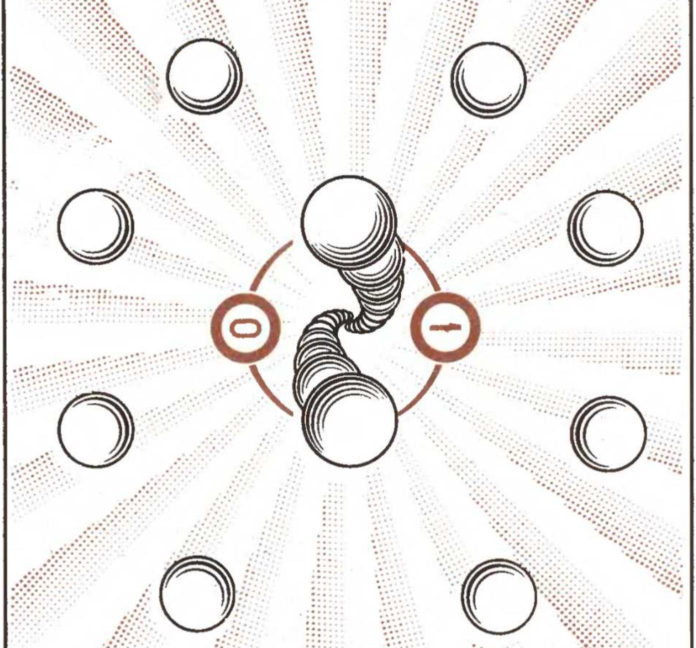
Чтобы в будущем быть «на ты» с персональным компьютером, каждому из вас предстоит обучиться программированию. Ведь ЭВМ, как известно, не работают без направляющего воздействия человека, причем их использование связано прежде всего с построением математических моделей и созданием вычислительных алгоритмов.

Помните, что секреты создаваемых ныне ЭВМ и сложные методы решения задач с их помощью станут понятными вам лишь при условии, что вы в совершенстве овладеете компьютерной грамотностью, основы которой дает эта книга.

Всем, кто не намерен останавливаться на достигнутом, предлагаем самостоятельно решить целый ряд задач, связанных с теоретическими основами кибернетики — науки об общих законах управления. Помещены они в конце книги и снабжены подробными пояснениями к решению.

I.

БУЛЕВА АЛГЕБРА— КЛЮЧ К ПРОГРАММИРОВАНИЮ



1. ТАБЛИЧНАЯ МОДЕЛЬ БУЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

На одном из конкурсов ученических конструкторских работ среди лучших была отмечена модель, изготовленная двумя братьями-школьниками,— необычное устройство для включения и выключения электрической люстры. Рассмотрим принцип его действия.

В комнате братьев имелась люстра; ее они подключили к данному устройству, а его подсоединили к трем обычным выключателям. Один из них *(A)* был установлен у двери, два других *(B* и *C)* — в изголовье кровати каждого из братьев. Схематически эта система изображена на рисунке 1.

Любой из братьев, войдя в неосвещенную комнату, может зажечь люстру с помощью выключателя *A* (выключатель переводится в положение «включено»), а приготовившись ко сну, может потушить ее, воспользовавшись выключателем *B* или *C*. Если теперь кто-то войдет в комнату и воспользуется выключателем *A*, переводя его на этот раз из положения «включено» в положение «выключено», то люстра загорится вновь. Потушить ее можно, щелкнув любым из трех выключателей.

(Рассматриваются стандартные выключатели. Если такой выключатель установлен в положение «включено», то изменить его положение на противоположное — установить в положение «выключено» — можно только рукой. Ясно, что действия с одним выключателем никак не сказываются на положении других выключателей).

По какому же принципу построена описанная конструкция?

Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо, оказывается, изучив систему управления люстрой, построить математическую модель работы прибора в целом.

Математический анализ такого рода систем удобно начинать с самых общих описаний. В данном случае система имеет следующую структуру. Она содержит выключатели *A, B* и *C;* сигналы от этих выключателей обрабатываются в устройстве управления (УУ), которое «принимает решение» зажигать или тушить люстру.

Задача устройства управления — правильно анализировать предъявляемые на его вход сигналы от всех трех выключателей и принимать верное решение.

Выключатель люстры, в отличие от выключателей *A, B* и *C* работает не «от руки», а с помощью сигнала, поступающего от устройства управления.

С точки зрения математика в УУ должна быть реализована функция от трех переменных, в которой каждая упорядоченная тройка значений *A, B,* и *C* соответствует единственному значению *F (A, B, C)*.

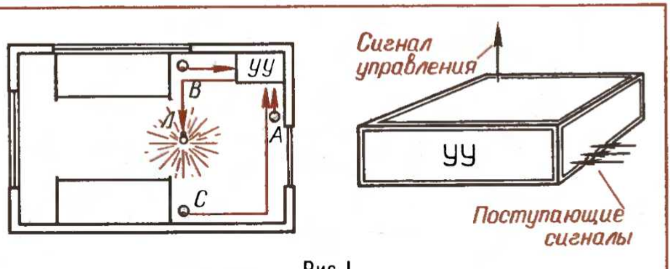


Рис. 1

Каждый выключатель, как известно, может быть только в одном из двух положений — «включено» или «выключено». Можно условиться поэтому: **если выключатель A находится в положении «включено», то значение переменной $A=1$, если этот же выключатель находится в положении «выключено», то $A=0$.**

Аналогично истолковываются значения переменных B и C. Сама функция $F\ (A,\ B,\ C)$ также принимает только два значения — 1 или 0, что означает соответственно: выключатель A люстры включен и выключен. Каждой тройке положений, в которых могут находиться выключатели, соответствует единственное значение искомой функции, то есть единственное состояние люстры: горит или не горит.

Итак, **создать математическую модель системы управления люстрой — это значит получить функцию $F\ (A,\ B,\ C)$.**

Известно, что многие функции удобно анализировать, если они заданы т а б л и ч н о. Попробуем представить таким способом искомую функцию $F\ (A,\ B,\ C)$.

Таблица должна, очевидно, состоять из четырех столбцов: три первых отводятся под значения переменных A, B и C (читатель помнит, что любая тройка значений этих переменных соответствует положению трех выключателей), четвертый содержит значения искомой функции, которые соответствуют состоянию люстры (табл. 1).

Заметим, что заполнение таблицы осуществляется шаг за шагом исключительно на основе наблюдений за «поведением» изучаемой системы.

Никаких других комбинаций из трех значений независимых переменных A, B и C быть не может (все возможные комбинации из трех включенных и выключенных выключателей учтены); таких упорядоченных «троек» будет 8.

Составленная таблица полностью задает функцию

Таблица I

A	B	C	F(A,B,C)	
0	0	0	0	*Ни один из выключателей не включен, люстра не горит*
1	0	0	1	*Школьник входит в комнату и выключателем A (у входа) зажигает люстру*
1	1	0	0	*Школьник, ложась спать, выключателем у своей кровати B выключил люстру*
0	1	0	1	*В комнату вошел школьник и, щелкнув выключателем A, еще раз зажег люстру*
0	1	1	0	*Ложась спать, этот школьник выключателем C у своей кровати погасил свет*
0	0	1	1	*Школьник проснулся утром первым, еще затемно, и своим выключателем у кровати B зажег люстру*
1	0	1	0	*Выходя из комнаты, школьник, щелкнув выключателем A, погасил свет*
1	1	1	1	*Эта ситуация может возникнуть, если в предыдущей ситуации кто-то нажмет на выключатель B*

F (A, B, C): в таблице указаны все значения аргументов и все соответствующие значения функции.

Функция *F (A, B, C)* принимает значение 1, когда какая-то одна или все три переменных одновременно равны 1. Это значит: **люстра зажигается тогда и только тогда, когда один из трех выключателей находится в положении «включено» или в этом же положении находятся все три выключателя одновременно.**

Итак, функцию *F (A, B, C)*, которая задает работу системы, мы получили и записали в одной из стандартных общепринятых форм — в виде таблицы. Эта функция характеризуется тем, что сама она и каждая из трех независимых переменных могут принимать только два значения: 0 или 1.

Функции, которые, как и их аргументы, принимают значения в области из двух элементов, называют булевыми.

Булевы функции находят широкое применение при математическом описании многих процессов, с их помощью исчерпывающим образом описывается действие многих автоматических устройств.

Возвращаясь к поставленной выше задаче, заметим, что всякая булева функция, представленная таблично, всегда может быть задана аналитически. О том, как решается эта задача, и более подробно о свойствах булевых функций рассказывается далее.

2. ОТ ТАБЛИЦЫ К ФОРМУЛЕ

Итак, одна математическая модель устройства найдена — это булева функция $F(A, B, C)$, заданная таблично. Располагая значением каждой переменной, по таблице можно найти соответствующее значение функции, причем в таблице отражены все ситуации, в которых может оказаться описанная выше система из трех выключателей и люстры.

Однако наряду с табличным способом задания функции широко применяется и аналитический — для нахождения значений функции используются вычисления по соответствующей формуле.

Оказывается, **используя таблицу, задающую булеву функцию, можно всегда получить формулу, задающую эту же функцию.** Для этого нужно:

1. Внимательно рассмотреть таблицу и выделить те строки, в которых значение функции равно 1 (в данном случае это вторая, четвертая, шестая и восьмая строки).

2. Выписать искомую формулу в виде «суммы». Число слагаемых в этой сумме всегда равно числу отмеченных строк (в данном случае число слагаемых в искомой формуле равно 4).

Схематически искомую формулу можно изобразить так:

$$F(A, B, C) = \square + \square + \square + \square .$$

3. Каждое слагаемое записать в виде «произведения» типа ABC. В каждом произведении обязательно три сомножителя — это переменные A, B и C, записанные либо «с чертой», либо «без черты». Например: A (без черты), $\bar{A}$ (с чертой).

4. Если значение какой-либо переменной в соответствующей строке таблицы равно 1, то в формулу эта переменная записывается без черты, если же значение переменной равно 0, то с чертой. Например, произведение, соответствующее второй строке таблицы 1, имеет вид: $A\bar{B}\bar{C}$.

Используя эти рекомендации, можно выписать формулу, соответствующую всей таблице 1:

$$F(A,\ B,\ C) = A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + ABC. \qquad (*)$$

Формула указывает, какие действия следует выполнить над значениями переменных A, B и C, чтобы вычислить значение функции.

Действия эти необычны. Дело в том, что «произведения» и «сумма», записанные в формуле (*), вычисляются не по правилам обычной арифметики, а по правилам булевой алгебры.

Прежде чем вычислять произведения, входящие в формулу (*), следует выяснить, что означает запись $\bar{A}$, $\bar{B}$ или $\bar{C}$, а также ознакомиться с тем, как вычисляют булевы суммы и булевы произведения.

Запись $\bar{A}$ (читается: «A с чертой») означает, что нужно выполнить **операцию отрицания** над значением переменной A. Операция выполняется очень просто: **одно из двух возможных значений A заменяется на противоположное.** Если данное значение $A=1$, то $\bar{A}=0$, и если $A=0$, то $\bar{A}=1$.

Операция отрицания задается таблицей 2.

Вычисление **булевых произведений** осуществляется по правилу: **значение произведения равно нулю, если хотя бы один из сомножителей равен нулю.**

Например, если $A=B=1$, $C=0$, то $ABC=0$, а

Таблица 2

A	$\bar{A}$
0	1
1	0

Таблица 3

A	B	AB
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Таблица 4

A	B	A+B
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$AB\bar{C}=1$ (так как значение переменной $C=0$ заменено на значение $\bar{C}=1$).

Булево произведение, называемое **конъюнкцией,** может включать два, три и более сомножителей. Если сомножителей два, то их произведение вычисляется по таблице 3.

В целом формула (✱) является булевой суммой, которая вычисляется по правилу: **булева сумма равна единице, если хотя бы одно слагаемое равно единице.**

Булеву сумму, называемую дизъюнкцией, задают таблицей 4.

Применим введенные определения для вычисления некоторых значений функции $F(A, B, C)$, заданной формулой (✱).

Пусть $A=B=1$ и $C=0$ (выключатели A и B находятся в положении «включено», а выключатель C — в положении «выключено»).

Вычислим сначала значение каждого из четырех произведений, входящих в формулу (✱):

$$A\bar{B}\bar{C}=0, \text{ так как } B=0,$$
$$\bar{A}B\bar{C}=0, \text{ так как } A=0,$$
$$\bar{A}\bar{B}C=0, \text{ так как } C=0,$$
$$ABC=0, \text{ так как } C=0.$$

Таким образом, $F(1, 1, 0)=0$.

Легко проверить, что

$$F(1, 0, 0) = F(0, 1, 0) = F(0, 0, 1) = F(1, 1, 1) = 1.$$

Это означает, что вычисления по формуле (✱) дают результаты, полностью совпадающие с таблицей 1.

Получением формулы (✱) завершается полный анализ системы управления люстрой, в которой столь необычно действуют стандартные выключатели. Итак, **в результате исследования системы создана ее математическая модель в виде булевой функции.**

Проанализируем еще раз процесс создания математической модели. В этом процессе можно выделить несколько этапов.

1. Прежде всего мы четко представили себе, что искомая функция зависит от трех переменных.

2. Затем было установлено, что искомая функция относится к булевым, каждая ее переменная и сама она принимают только два значения: 0 и 1.

3. Отсюда сразу стало ясно, что искомую, как и всякую булеву функцию, можно исчерпывающим образом задать таблично.

Действительно, если бы разыскиваемая функция была функцией от двух переменных, то мы получили бы таблицу 5.

В такой таблице всего 4 строки, так как различных упорядоченных пар значений аргументов для $F(A, B)$

Таблица 5

A	B	F(A,B)
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Таблица 6

n	2^n	m
2	2^2	4
3	2^3	8
4	2^4	16
5	2^5	32

всего четыре; для каждой отводится в таблице одна строка.

Если аргументов три, то в таблице, задающей $F(A, B, C)$, уже 8 строк: к каждой из четырех возможных пар значений A, B присоединяются два значения переменной C.

Если аргументов четыре, то в таблице для $F(A, B, C, D)$ уже 16 строк. Присоединение одного аргумента увеличивает число строк вдвое.

Вообще, если n — число аргументов, то $m = 2^n$ — число строк в таблице 6, полностью задающей функцию $F(A_1, A_2, ..., A_n)$.

4. Далее выяснилось, что от табличного способа задания булевой функции можно всегда перейти к аналитическому ее заданию с помощью формулы. Метод получения формулы по таблице оказался очень простым; нетрудно выполнить и основные булевы операции: дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание.

В процессе создания математической модели возникла ситуация, характерная для тех случаев, когда математик приступает к решению новых поставленных практикой задач. Новая задача потребовала новых средств, в данном случае — использования булевых операций.

При этом, как правило, обнаруживается, что вводимые новые математические средства оказываются полезными для решения более широкого круга задач, а исходная задача служит лишь импульсом, вызвавшим появление этих средств.

Так случилось и с булевыми функциями, которым уже найдено немало интересных применений. О них будет рассказано ниже.

Предлагаем читателю попробовать свои силы в математическом анализе еще одного устройства с тем, чтобы получить его математическую модель.

Это устройство предназначено для включения и выключения света в длинной подземной галерее. Схема-

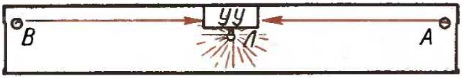


Рис. 2

Таблица 7

A	B	F(A,B)	
0	0	0	*Оба выключателя выключены, в галерее темно*
0	1	1	*Через вход В кто-то вошел в галерею и, включив выключатель В, зажег свет*
1	1	0	*Пройдя всю галерею, посетитель выключателем А погасил лампу*
1	0	1	*Кто-то вновь через вход вошел в галерею и включил лампу, переведя выключатель В из состояния „включено" в состояние „выключено"*

тически галерею и управляющий освещением аппарат можно изобразить так, как показано на рисунке 2.

В систему входят два выключателя A и B, установленные у входов (они же и выходы), устройство управления (УУ), к которому подключены эти выключатели, и выключатель лампы, освещающей галерею.

Если в галерее людей нет, то она не должна освещаться. При входе в галерею с любой ее стороны выключателем, установленным у этого входа, можно включить освещение; пройдя галерею и выходя из нее, можно потушить свет другим выключателем. Если теперь кто-то вновь войдет в галерею с того же конца, то, щелкнув выключателем (переведя его в противоположное положение), он осветит ее; затем выключателем у любого из выходов свет в галерее можно погасить.

Иначе говоря, **система должна работать так, чтобы освещение можно было бы зажечь с любого входа в галерею и на любом выходе из нее погасить.** (Используются два стандартных выключателя).

Функцию $F(A, B)$, соответствующую описанному устройству, задает таблица 7.

Искомая формула, соответствующая таблице, такова:

$$F(A, B) = A\bar{B} + \bar{A}B.$$

Полученную формулу можно истолковать так: **освещение галереи включено только тогда, когда выключатели у ее входов находятся в противоположных положениях.**

В завершение рассказа о конструкциях, для математического описания которых удобно использовать булевы функции, рассмотрим устройство, с помощью которого включается и выключается освещение оранжереи, и построим его математическую модель.

Оранжерея освещается большой лампой, расположенной в центре. Вокруг оранжереи галерея. Войти в эту галерею или выйти из нее можно через четыре двери. Схематически оранжерея и окружающая ее галерея изображены на рисунке 3.

У каждой из дверей установлен один стандартный выключатель. Все такие выключатели A_1, A_2, A_3 и A_4 подсоединены к устройству управления (УУ), которое соединено с лампой, освещающей оранжерею.

Сначала все четыре выключателя находятся в положении «выключено», и лампа не горит. При входе в галерею через любую дверь можно выключателем, установленным у этой двери, зажечь лампу. Выходя из галереи через любую дверь, лампу можно погасить, щелкнув выключателем, установленным у этой же две-

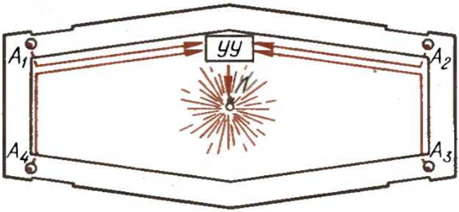


Рис. 3

Таблица 8

A_1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
A_2	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
A_3	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
A_4	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
F	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?

A_3A_4 \ A_1A_2	00	01	11	10
10				
11				
01				
00				

Рис. 4

1		1	
	1		1
1		1	
	1		1

Рис. 5

ри. Далее свет можно включить, а затем и погасить любым из выключателей.

Какой вид будет иметь булева функция, соответствующая такой системе?

Ясно, что это функция от четырех переменных —

$F(A_1, A_2, A_3, A_4)$. По условию работы системы сначала все 4 выключателя находятся в положении «выключено» и лампа не горит, следовательно: $F(0, 0, 0, 0) = 0$. Включение одного из выключателей означает, что какая-то одна из переменных изменит свое значение «0» на значение «1». Оранжерея при этом окажется освещенной. Чтобы потушить лампу, достаточно изменить положение любого из выключателей, то есть изменить значение какой-то одной переменной.

Составив таблицу, задающую функцию $F(A_1, A_2, A_3, A_4)$, можно выделить все «четверки» состояний выключателей, при которых, оранжерея освещена, их будет 16 ($2^4 = 16$). Все соответствующие ситуации представлены в таблице 8.

Нижнюю строку таблицы предлагаем заполнить читателю самостоятельно.

Узнать, каким «четверкам» будет соответствовать значение $F = 1$, можно и иным способом, основанным на составлении и применении специальной карты.

Рассмотрим пример.

Для отыскания функции от четырех переменных, то есть функции $F(A_1, A_2, A_3, A_4)$, карта имеет вид, изображенный на рисунке 4.

Карта напоминает систему координат, каждой клетке соответствует «четверка», составленная из букв 0 и 1. Так, например, левой нижней клетке соответствует «четверка» — (0000), клетке, расположенной справа рядом,— «четверка» (0100), следующей справа — (1100), и так далее.

Заметим, что всяким двум соседним (по вертикали или по горизонтали) клеткам соответствуют «четверки», отличающиеся значением только одного разряда.

Остановимся теперь на том, как подготовленная нами карта позволит получить формулу искомой булевой функции.

По условию работы устройства известно, что $F(0, 0,$

0, 0) = 0, то есть значение искомой функции в левой нижней клетке карты равно нулю. Если теперь рассмотреть любую из соседних клеток, то в каждой из них значение функции будет равно единице: $F(0100) = 1$ и $F(0001) = 1$. В том, что это действительно так, мы убеждены, ведь состоянию (0, 0, 0, 0) соответствует ситуация — «все 4 выключателя выключены», а состоянию (0, 1, 0, 0) — «выключатель A_2 включен, а остальные выключены».

Переходя от клетки к клетке, можно одним клеткам поставить в соответствие 1, а другим — 0. Легко увидеть, что такие клетки чередуются. На рисунке 5 отмеченным клеткам соответствует значение $F = 1$.

Все сказанное позволяет дать правило выписывания искомой формулы:

1) опираясь на условия работы устройства, отметьте клетки, которым ставится в соответствие 1;

2) искомая формула содержит столько же слагаемых, сколько имеется отмеченных клеток;

3) каждое слагаемое есть произведение, состоящее из переменных, взятых либо с отрицанием, либо без отрицания.

Формула, соответствующая искомой функции, имеет вид:

$$F(A_1, A_2, A_3, A_4) = \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4 + A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 A_4 + \\ + A_1 A_2 \bar{A}_3 A_4 + \bar{A}_1 A_2 A_3 A_4 + A_1 \bar{A}_2 A_3 A_4 + A_1 A_2 A_3 \bar{A}_4 + \\ + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 \bar{A}_4.$$

Эту формулу можно истолковать так: **оранжерея освещена, если только один из выключателей находится в состоянии «выключено» или в этом же положении находятся любые три из них.**

Путем составления карт можно получить формулы и для ранее рассмотренных функций $F(A, B)$ и $F(A, B, C)$.

Соответствующие карты изображены на рисунках 6 а, б.

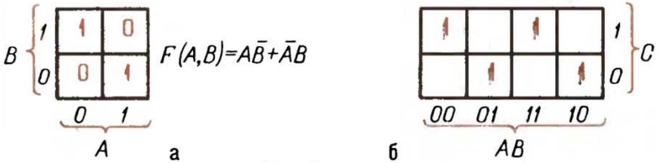


Рис. 6

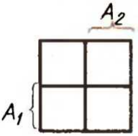


Рис. 7

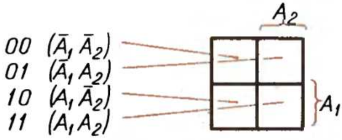


Рис. 8

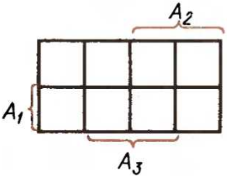


Рис. 9

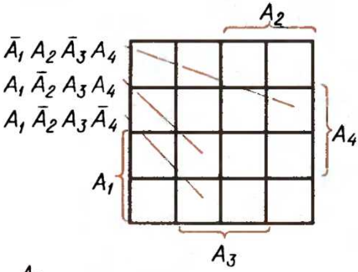


Рис. 10

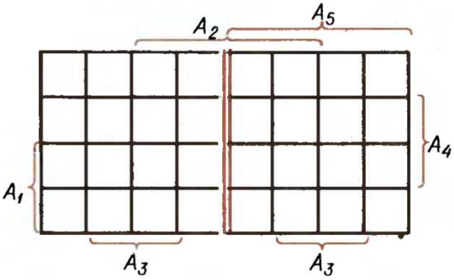


Рис. 11

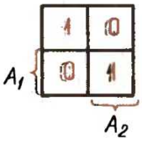


Рис. 12

Рассмотренные карты называются **картами Карно.** Если искомая функция зависит не более чем от 6 переменных, то для ее задания карта Карно нагляднее, чем таблица.

Каждая карта Карно разделена на квадратики, причем каждому квадратику соответствует единственная комбинация значений всех переменных. Пример карты для переменных A_1 и A_2 показан на рисунке 7.

Обозначения переменных ставятся сбоку и сверху и относятся ко всему столбцу (или строке) следующих за ними квадратиков, причем считается, что значение переменных в этих квадратиках равно 1.

Отсюда следует, каким образом в карте для двух переменных размещены все пары значений переменных A_1 и A_2 (рис. 8).

Эти значения переменных не пишутся на карте, они лишь подразумеваются, а в квадратиках карты пишется значение той функции, для которой составлена карта.

Карта Карно для функции от трех переменных имеет вдвое больше квадратиков, чем карта для двух переменных (прибавление новой переменной удваивает карту потому, что новая переменная должна иметь границу со всеми комбинациями двух переменных).

На рисунке 9 изображена карта, подготовленная для записи функции от трех переменных $F(A_1, A_2, A_3)$.

Переменная A_3 имеет значение 1 в двух средних столбцах и значения, равные нулю, в обоих крайних столбцах.

Карту Карно для функций от четырех переменных получим из карты для $F(A_1, A_2, A_3)$, вставив две строки в середину (рис. 10).

Справа выписаны некоторые четверки значений переменных и указано, какие клетки карты им соответствуют.

Карту Карно для функции от 5 переменных $F(A_1$,

A_2, A_3, A_4, A_5) **можно составить из двух карт для функции от четырех переменных, расположив их симметрично относительно общей вертикальной границы** (рис. 11).

Карту для функций от 6 переменных предлагаем читателю вычертить самостоятельно. Заметим только, что эта карта образуется как бы из 4 карт для функций от 4 переменных.

В заключение знакомства с картами Карно покажем, как это необычное графическое средство помогает выписывать булевы функции в двух формах. Одна форма нам уже известна — **булевы функции записываются в виде суммы произведений.** Например, $F(AB) = A\bar{B} + \bar{A}B$ (во внимание принимаются только те клетки карты Карно, в которых значение функции равно 1).

Вторая форма — **булева функция записывается в виде произведения сумм.** Для этого необходимо отметить те клетки карты, в которых значение функции равно нулю, и составить сумму из всех переменных, беря их с отрицанием. Число сумм равно количеству отмеченных клеток.

Пусть, например, дана карта Карно для $F(A_1, A_2)$ (рис. 12).

Нижней левой клетке ставим в соответствие сумму $(A_1 + A_2)$, верхней правой клетке — сумму $(A_1 + A_2)$.

Искомая формула имеет вид:

$$F(A_1, A_2) = (\bar{A}_1 + \bar{A}_2)(A_1 + A_2).$$

Эта же функция, если формулу ее записать в виде суммы произведений, представляется так:

$$F(A_1, A_2) = \bar{A}_1\bar{A}_2 + A_1A_2.$$

3. УДИВИТЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Выше булевы функции были определены как функции, в которых аргументы и сама функция принимали два значения. Эти значения были обозначены как «1» и «0», причем **символы 1 и 0 рассматривались не как цифры, а как символы с заранее обусловленным содержанием.**

Все три операции, с помощью которых вычисляется значение булевых функций, были определены таблично. Интересно, однако, отметить, что если символы 1 и 0 считать цифрами, то операции отрицания, дизъюнкции можно задать иначе:

значение $\bar{A}$ равно результату вычислений по формуле $1 - A$, где от 1 (по правилам обычного вычитания) отнимается значение переменной A (если, например, $A=1$, то $\bar{A}=0$, если $A=0$, то $\bar{A}=1$; результаты соответствуют таблице);

значение $A+B$ вычисляется по правилу: дизъюнкция равна наибольшему из значений A и B (если, например, $A=1$ и $B=0$, то $A+B=1$, если $A=B=0$, то $A+B=0$; если $A=B=1$, то $A+B=1$); это правило сокращенно записывают так: $A+B=\max(A, B)$;

значение AB вычисляется по правилу: конъюнкция равна наименьшему из значений A и B; это правило иногда записывают так $AB=\min(A, B)$.

$A+B-AB$ (вычисление дизъюнкции $A+B$); (1)
AB — (вычисление конъюнкции AB); (2)
$1-A$ — (вычисление отрицания A). (3)

Ниже приведены таблицы 9, 10 и 11, которые убеждают в том, что вычисления, выполненные по приведенным формулам, дают требуемые результаты.

Пользуясь такими «арифметическими моделями» булевых операций, можно вычислять значения сложных булевых выражений. Для этого исходную булеву формулу необходимо сначала преобразовать, заменяя каждую булеву операцию на соответствующие арифметические. В результате получится формула, пользуясь которой по правилам обычной арифметики, можно получить значение исходной булевой функции.

Пусть, например, исходная булева функция имеет вид:

$$F(A, B)=A\bar{B}+\bar{A}B.$$

Для ее преобразования воспользуемся формулами (1), (2) и (3):

$$F(A, B)=A(1-B)+(1-A)B-AB(1-A)(1-B)=$$
$$=(A+B)-AB(3-A-B+AB).$$

Легко убедиться, что вычисления по этой арифметической формуле дают такие же результаты, как и

Таблица 9

A	B	AB
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Таблица 10

A	B	A+B−AB
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Таблица 11

A	1−A
1	0
0	1

вычисления по формуле, в которой предусмотрены булевы операции:

$$F(A,\ \bar{B}) = F(1,\ 0) = 1,$$
$$F(\bar{A}B) = F(0,\ 1) = 1,$$
$$F(A,\ B) = F(\bar{A}\bar{B}) = 0.$$

Обнаруженная связь между арифметическими и булевыми операциями дает возможность создавать модели рассмотренных выше устройств уже не в виде булевых функций, а в виде арифметических.

Может возникнуть вопрос — не много ли внимания уделяется булевым функциям? Достаточно ли велико их значение? В каких, например, еще конкретных задачах применение булевых функций необходимо и эффективно?

Остановимся на некоторых областях применения этих функций.

Булевы функции широко применяются для описания устройств, преобразующих информацию.

В парламентах некоторых стран установлены машины для подсчета результатов голосования. Эти машины обрабатывают индивидуальные «за» и «против», которые подаются членами парламента, и в качестве результата выдают одно из двух возможных решений: «принято» или «отклонено». Аналогичные машины устанавливаются на спортивных состязаниях, где совокупность независимых решений нескольких судей определяет их общее решение. Судьи вводят в машину свои «да» или «нет», машина обрабатывает их и принимает окончательное решение. Деятельность таких устройств хорошо описывается с помощью булевых функций.

Булевы функции очень удобны для описания устройств, выполняющих арифметические действия над двоичными числами.

Пусть дано, например, арифметическое устройство, в которое мы можем ввести две двоичных цифры: 1 и 0; результатом работы устройства будет их сумма. Устройство работает в соответствии с правилами сложения двоичных чисел:

$$+\begin{array}{r}1_2\\1_2\\\hline 10_2\end{array}\qquad +\begin{array}{r}1_2\\0_2\\\hline 01_2\end{array}\qquad +\begin{array}{r}0_2\\1_2\\\hline 01_2\end{array}\qquad +\begin{array}{r}0_2\\0_2\\\hline 00_2\end{array}\quad \text{или}\quad \boxed{+\begin{array}{r}A\\B\\\hline PS_2\end{array}}$$

Булевы функции, соответствующие разрядам S и P найденной суммы, таковы:

$$S = A\bar{B} + \bar{A}B,$$
$$P = AB.$$

В виде булевых функций можно описать работу не только суммирующих устройств, и устройств, осуществляющих умножение, вычитание и деление.

Еще одной областью, где существенную роль играют булевы функции, является математическая логика, главным образом — ее раздел, называемый алгеброй высказываний.

В этой необычной алгебре действия осуществляются над высказываниями.

Зная истинность или ложность одних, можно вычислить истинность более сложных, составных высказываний.

Примером может быть такая задача:

В соревнованиях по гимнастике на первенство школы участвуют Алла, Валя, Таня и Даша. Болельщики высказали предположения о возможных победителях:

1. Первой будет Таня, Валя будет второй.
2. Второй будет Таня, Даша — третьей.
3. Алла будет второй, Даша — четвертой.

По окончании соревнований оказалось, что в каждом предположении только одно из высказываний истинно, другое же ложно. Какое место на соревнованиях заняла каждая из девочек, если все они оказались на разных местах?

В задачах алгебры высказываний по данным высказываниям и их логической взаимосвязи разыскиваются новые высказывания, отвечающие на поставленный в логической задаче вопрос.

Читатель согласится, что три названные области достаточно важны, и булевы функции, без которых обойтись там трудно, не могли не привлечь внимание специалистов. Математики самым подробным образом изучили свойства отдельных булевых операций и функций. Очень важным оказался тот факт, что инженеры сумели найти очень простые способы автоматизации операций отрицания, дизъюнкции и конъюнкции, то есть им удалось смоделировать вычисление булевых функций. Логики, а затем и программисты, управляющие вычислительными машинами, нашли немало интересных применений булевым операциям.

Знакомство с необычными свойствами основных операций булевой алгебры позволяет расширить представление об алгебраических операциях вообще.

Заметим, что свойства операций дизъюнкции и конъюнкции целесообразно изучать в сопоставлении, поскольку именно так легче всего обнаружить их общность и различие.

Имеем: $A+B \equiv B+A,\ AB \equiv BA,$

$$A+(B+C) \equiv A+(B+C),\ A(BC) \equiv (AB)C.$$

Таким образом, обе операции обладают переместительным и сочетательным свойствами. Кроме того,

$$\boxed{A+A \equiv A,\ AA \equiv A.}$$

Это свойства так называемой **идемпотентности.** Оба они вытекают из определений. В самом деле:

$$A+A=\max(A,\ A)=A \text{ и } AA=\min(A,\ A)=A.$$

Итак, в записи булевых формул не будут использоваться коэффициенты и показатели степени, отличные от 1.

Выполняются и такие тождества:

$$\boxed{A+\bar{A}=1,\quad A\bar{A}=0.}$$

Действительно, левую часть первого тождества можно представить в виде $A+(1-A)=1$, а левую часть второго — в виде $A\ (1-A)=A-A=0$.

Отсюда следует, что символы «1» и «0» должны рассматриваться не только как значения переменных, входящих в формулу, а и как константы, которые могут быть использованы при записи выражений. Действия с такими константами подчиняются правилам:

$$A+0\equiv A,\quad A\cdot 1\equiv A,$$

$$\boxed{A+1\equiv 1,\quad A\cdot 0\equiv 0.}$$

Доказательство второго правила для дизъюнкции следует из определения:

$$A+B=\max(A,\ B) \text{ при } B=1.$$

Интересно, что дизъюнкция и конъюнкция обладают взаимными распределительными свойствами, а именно:

$$\boxed{A+BC\equiv(A+B)(A+C),\ A(B+C)\equiv AB+AC.}$$

В истинности тождества можно убедиться, воспользовавшись таблицей 12.

Сравнивая 5-й и 8-й столбцы, видим, что вычисления, проводимые по формулам $A+BC$ и $(A+B)(A+C)$, да-

Таблица 12

A	B	C	BC	A+BC	A+B	A+C	(A+B)(A+C)
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Таблица 13

A	B	$\bar{A}$	$\bar{B}$	A+B	$\overline{A+B}$	$\bar{A}\bar{B}$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1

ют одинаковые результаты, а это значит, что эти формулы тождественны друг другу — вместо одной можно пользоваться другой.

Обратим внимание на свойства операции отрицания. $\bar{\bar{A}} \equiv A$, так как $1-(1-A)=A$.

Операция отрицания не обладает распределительным свойством относительно дизъюнкции и конъюнкции. Имеют место следующие тождества:

$\overline{AB} \equiv \bar{A}+\bar{B}$ — отрицание конъюнкции эквивалентно дизъюнкции отрицаний;

аналогично:

$\overline{A+B} \equiv \bar{A}\cdot\bar{B}$ — отрицание дизъюнкции эквивалентно конъюнкции отрицаний.

Докажем первое тождество.

Напомним, что $\bar{A}$ моделируется автоматически как $1-A$, дизъюнкция $(A+B)$ как $(A+B-AB)$. Тогда дизъюнкция отрицаний $(A+B)$ будет моделироваться арифметическим выражением

$$(1-A)+(1-B)-(1-A)(1-B)=$$
$$=2-A-B-1+A+B-AB=1-AB,$$

которое является моделью отрицания конъюкции AB.

Для доказательства второго тождества можно поступить аналогично, но можно и составить таблицу 13.

Совпадение 7-го и 8-го столбцов доказывает эквивалентность формул $\overline{A+B}$ и $\bar{A}\bar{B}$.

В заключение рассмотрим так называемый **закон двойственности,** подчеркивающий удивительную симметрию в свойствах операций дизъюнкции и конъюнкции.

Читается этот закон так:

Если в каком-либо тождестве (например, $\overline{AB}=\bar{A}+\bar{B}$) **все операции дизъюнкции заменить на конъюнкцию и наоборот, а все встречающиеся в тождестве символы «0» заменить на «1» и наоборот, то полученное выражение будет тождеством, двойственным исходному.**

Например,

исходное тождество:	двойственное ему:
$\overline{AB}=\bar{A}+\bar{B}$,	$\overline{A+B}=\bar{A}\cdot\bar{B}$,
$A(B+C)=AB+AC$,	$A+BC=(A+B)(A+C)$,
$A\cdot 0=0$;	$A+1=1$.

Мы познакомились с тем, как при решении конкретной практической задачи возникла необходимость обратиться к булевой алгебре, и узнали, как с помощью булевых функций можно создавать математическую модель конкретного практически действующего устройства.

Выяснилось, что булевы функции, кажущиеся на первый взгляд столь простыми,— аргумент и функция принимают всего два значения, на самом деле весьма и весьма эффективны при решении широкого круга задач.

В заключение отметим, что выше были рассмотрены только две булевы функции от двух переменных: дизъюнкция и конъюнкция. Каждая из них была задана таблично. Нетрудно, однако, сообразить, что таких таблиц (напомним: в таблице 4 строки, каждая строка отведена под одну упорядоченную пару значений переменных) можно составить 16. Иначе говоря, булевых функций от двух переменных всего существует 16. Мы ограничимся лишь двумя примерами. Функции, называемые **импликацией** и **эквивалентностью**, задаются таблицами 14 и 15.

Более полные сведения о булевой алгебре читатель сможет почерпнуть из рекомендуемой литературы.

Таблица 14

A	B	$A \to B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Таблица 15

A	B	$A \sim B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

4. БУЛЕВЫ ОПЕРАЦИИ ВЫПОЛНЯЕТ АВТОМАТ

Попробуем представить себе устройство, выполняющее операцию конъюнкции. Каким оно должно быть?

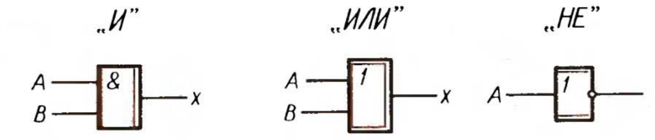
Схематически его можно представить в виде «черного ящика» с двумя входами, через которые поступают в него значения двух переменных A и B, и одним выходом X, где демонстрируется результат выполнения операции. На рисунке 13, а показан такой «черный ящик».

На каждый вход подступают сигналы только двух видов — один из них мы обозначим «1», другой — «0», на выходе после выполнения операции такие же сигналы обозначают результат. В любой момент времени на каждом входе имеется сигнал — либо «0», либо «1» (ситуация, когда на входе или выходе нет никакого сигнала, невозможна). В процессе работы эти сигналы сменяют друг друга скачком.

Аналогично можно представить себе устройство для выполнения дизъюнкции и отрицания. Схематически их принято изображать так, как показано на рисунках 13, б, в.

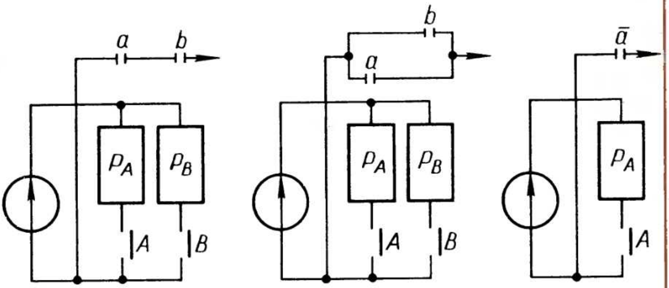
Для доказательства существования таких устройств обратимся к самым простым их конструкциям на базе электромагнитных реле.

Условимся в дальнейшем устройство для выполнения конъюнкции называть элементом «И», дизъюнк-



а б в

Рис. 13



а б в

Рис. 14

ции — элементом «ИЛИ» и отрицания — элементом «НЕ».

Рассмотрим работу элемента «И» (рис. 14, а). Пусть нажатие кнопки A соответствует тому, что значение переменной $A=1$, а ненажатие — тому, что $A=0$. Нажатие кнопки A замыкает цепь, в которую включена катушка реле (P_A), и в ней появляется ток, что сразу же вызывает замыкание контактов a. То же случится с контактами b, если нажать на кнопку B. Из схемы элемента «И» видим, что при одновременном нажатии кнопок A и B на выходе X появится такой же сигнал, каким были включены реле, а это и означает, что при $A=B=1$ их конъюнкция $X=AB=1$.

Ясно, что если нажата только одна из кнопок, то

$X=0$ (по разомкнутой цепи сигнал «1» на выход элемента пройти не сможет).

Из схемы элемента «ИЛИ» (рис. 14,б) видим, что на его выходе сигнал «1» появится, если нажата хотя бы одна из кнопок. Это значит, что элемент «ИЛИ» умеет правильно выполнять операцию дизъюнкции.

Элемент «НЕ» (рис. 14, в) — нажатие кнопки A ($A=1$) вызовет размыкание контактов, и сигнал $X=1$ заменится сигналом $X=0$; ненажатие кнопки A ($A=0$) демонстрирует сигнал «1» ($X=1$).

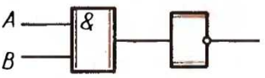


Рис. 15

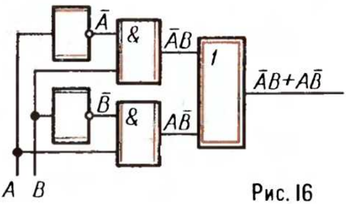


Рис. 16

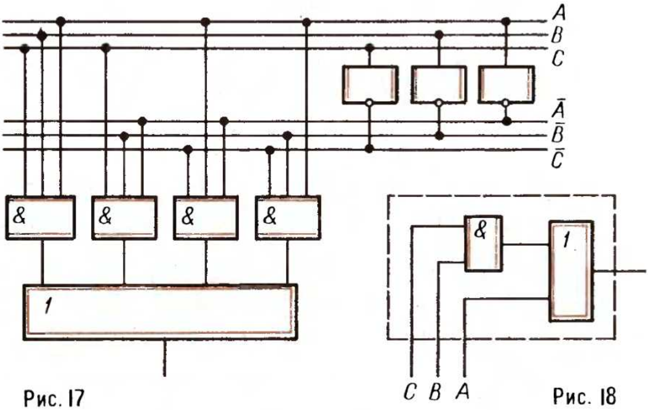


Рис. 17

Рис. 18

Сделаем важное замечание, которое следует из рассмотрения всех трех схем: **сигнал, получаемый на выходе любого элемента, сконструированного на электромагнитной основе, можно использовать в роли значения новой переменной и подавать на вход других таких же элементов, образуя цепочки из логических элементов.**

На рисунке 15 изображена такая цепочка, в которую входят элемент «И» и подключенный к его выходу элемент «НЕ».

Такую цепочку следует рассматривать как составной элемент, выполняющий не одну, а две булевых операции. Сначала он выполнит над значениями переменных A и B операцию конъюнкции, а затем над полученным результатом — операцию отрицания. Можно сказать, что это устройство будет вычислять значения функции, заданной формулой $F(A, B) = \overline{AB}$.

Нетрудно сообразить, как из отдельных элементов можно изготовлять иные составные устройства, пригодные для вычислений по более сложным формулам.

5. АВТОМАТ ВЫЧИСЛЯЕТ БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

Всякое вычисление булевой функции, заданной в виде формулы, представляет собой последовательность отдельно выполняемых булевых операций.

Вспомним математическую модель устройства, которое управляло освещением галереи. Моделью являлась булева функция

$$F(A,\ B)=A\bar{B}+\bar{A}B.$$

Чтобы вычислить значение этой функции при конкретных значениях переменных A и B, достаточно отдельно выполнить операции отрицания, конъюнкции и дизъюнкции. А так как эти отдельные операции могут выполнять логические элементы, то нетрудно сообразить как из элементов «И», «ИЛИ» и «НЕ» можно составить устройство для вычисления значений функции по заданной формуле в целом.

Схема соответствующего устройства представлена на рисунке 16.

Получаемые на выходе устройства сигналы можно подать на реле, с помощью которого включается и выключается лампа, освещающая галерею. Таким образом, созданное устройство оказалось не только вычислительным, но и управляющим. Лампа зажигается по заданному ей предписанию.

Можно теперь раскрыть и секрет устройства, описанного в начале этой книги.

Математической моделью его являлась булева функция

$$F(A,\ B,\ C)=\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}B\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}+ABC.$$

Схема устройства, которое умеет вычислять по этой формуле или, что то же самое, управлять в соответствии с этой формулой, изображена на рисунке 17.

Из рассмотренных примеров видно, что **если булева функция, описывающая работу какого-либо устройства, известна, то это устройство всегда можно изготовить из отдельных логических элементов.**

В заключение рассмотрим еще одно интересное устройство.

Представьте себе, что вы наблюдаете за соревнованиями штангистов. Для оповещения зрителей изготовлен подсвечиваемый транспарант с надписью «Вес взят правильно». Подсвечивание его осуществляется по сигналу «1», который выдает устройство, обрабатывающее решение трех судей A, B и C. Судья A является старшим. Если судья считает, что спортсмен выполнил упражнение без ошибок, то он нажимает кнопку, подавая в устройство сигнал «1».

Сигнал на подсвечивание транспаранта устройство выдает только тогда, когда все судьи или два из них нажали свои кнопки, но при этом одним обязательно должен быть старший судья A.

Работу по созданию устройства начнем с поиска булевой функции, которая полностью описывает его работу. Прежде всего представим его в виде «черного ящика» — еще неизвестно, как он устроен внутри, но уже ясно, что ему предстоит делать и как он связан с внешней средой: будущее устройство имеет три входа для получения сигналов от трех судей и один выход для выдачи сигнала на подключение транспаранта.

Как и ранее, зададим булеву функцию таблично (табл. 16).

Таблица 16

A	B	C	X	
1	1	1	1	*Все три судьи считают, что вес взят правильно, транспарант подсвечен*
1	1	0	1	*Судья B и старший судья A — „за", транспарант подсвечен*
1	0	1	1	*Судья C и старший судья A — „за", транспарант подсвечен*
1	0	0	0	*Только старший судья A — „за", транспарант не включен*
0	1	1	0	*Судья A „против" и транспарант не включен*
0	1	0	0	
0	0	1	0	
0	0	0	0	

Составляем формулу:

$$F(A, B, C) = ABC + AB\bar{C} + A\bar{B}C =$$
$$= ABC + AB\bar{C} + ABC + A\bar{B}C = AB + AC = A(B + C).$$

Теперь можно вычертить схему устройства. Для этого потребуется один элемент «ИЛИ» и один элемент «И» (рис. 18).

Итак, булевы функции очень интересны. Самое неожиданное обнаружилось, когда мы предприняли попытки создавать устройства, действующие согласно предписанию булевой формулы. Выяснилось, что булева формула, описывающая действие «черного ящика», одновременно и задает его внутреннюю структуру, показывает, из каких логических элементов его следует изготовлять и как эти элементы соединять друг с другом.

6. БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ В ДЕЙСТВИИ

Развивая идею о том, чо формула, задающая булеву функцию, является одновременно и описанием логического устройства, остановимся на двух задачах.

Задача об электростанции

Пусть три цеха A, B и C снабжаются электроэнергией от небольшой электростанции. На этой станции установлены два специальных электрогенератора (они вырабатывают электрический ток требуемой частоты и напряжения) — X и Y. Мощность генератора X в два раза больше, чем генератора Y.

Если в энергии нуждается один любой из трех цехов, то достаточно включить генератор Y, если же в энергии нуждаются два любых цеха одновременно — достаточно генератора X. Снабжение энергией по заявке трех цехов одновременно обеспечивается совместной работой генераторов X и Y.

Необходимо сконструировать автомат «дежурный», который, получая сигналы (заявки на подключение) от цехов A, B и C, смог бы разумно перераспределить нагрузку между генераторами, включая и выключая по мере необходимости любой из них.

Задача о сумматоре

Пусть необходимо построить арифметическое устройство для сложения двух n-разрядных целых положительных двоичных чисел. Иначе говоря, следует сконструировать автомат, которому под силу вычислить сумму такого вида:

$$\begin{array}{r} 1010111_2 \\ 1110101_2 \\ \hline ? \end{array}$$

Для конкретности в примере взяты восьмиразрядные слагаемые. Заметим, что сложение цифр в каждом разряде ведется по одному правилу: суммируются цифры данного разряда и, возможно, к ним прибавляется единица переноса из младшего разряда. Вот так будет, например, вычисляться сумма цифр третьего разряда (он выделен прямоугольником):

$$\begin{array}{r|c|l c l}
1 & 1 & & & 1 \text{ — единица переноса из второго разряда} \\
10101 & 1 & 1_2 & + & 1 \\
\underline{11101} & \underline{0} & \underline{1_2} & & \underline{1} \\
 & 0 & 0 & & ?
\end{array}$$

Ясно, что если удастся создать устройство, которое сможет находить суммы вида

$$\begin{array}{r} a \\ +\ b \\ c \\ \hline ? \end{array}$$

где a, b и c равны либо 1, либо 0, то задача будет решена. Забегая вперед, заметим, что такое устройство называется **сумматором** и является важнейшей частью любого арифметического узла современной ЭВМ.

В решении этих двух задач особенно ярко демонстрируются достоинства булевых функций.

Приступим к решению первой задачи. Искомое устройство представим в виде «черного ящика» (рис. 19).

У будущего автомата «дежурный» три входа, через них к нему приходят сигналы от цехов: «нуждаюсь

Черный ящик будущего автомата „дежурный"

Рис. 19

Таблица 17

A	B	C	X	Y	
1	1	1	1	1	*В энергии нуждаются три цеха, включены оба генератора*
1	1	0	1	0	*В энергии нуждаются только один или два цеха и включен один из генераторов, а другой выключен*
1	0	1	1	0	
1	0	0	0	1	
0	1	1	1	0	
0	1	0	0	1	
0	0	1	0	1	
0	0	0	0	0	*Ни один из цехов не нуждается в энергии, оба генератора выключены*

в энергии» — 1 и «не нуждаюсь в энергии» — 0. Автомат имеет два выхода, через них сигналы на включение — 1 и выключение — 0 поступают к генераторам X и Y.

Используя словесное задание функции, попробуем задать ее таблично (табл. 17).

Ясно, что эта таблица задает две булевых функции

$$X(A, B, C) = ABC + AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC, \quad (1)$$

$$Y(A, B, C) = ABC + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C. \quad (2)$$

Формулу (1) можно упростить, представив ее в виде:

$$X(A,\ B,\ C)=AB+AC+BC. \tag{3}$$

Эта формула означает, что генератор X следует включать, если есть заявки от любой пары цехов.

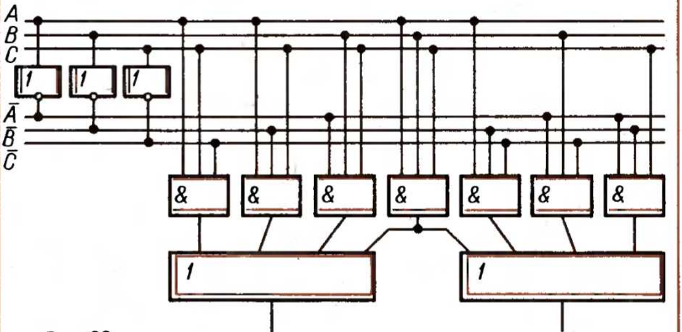


Рис. 20

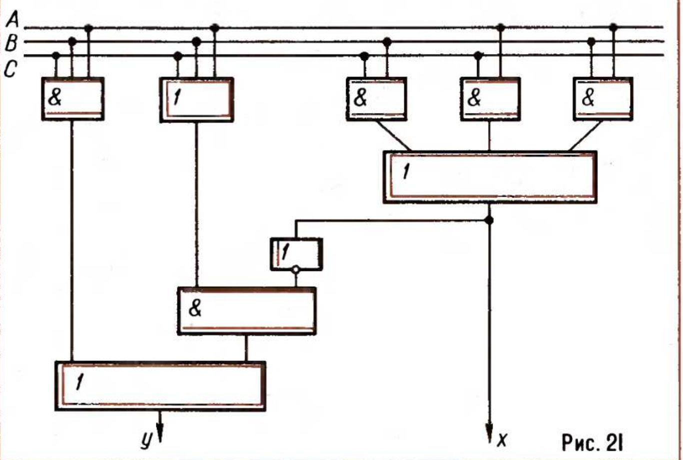


Рис. 21

Располагая формулами (2) и (3), вычерчиваем функциональную схему (рис. 20), которую можно еще упростить (рис. 21).

Обратимся теперь к задаче конструирования сумматора. Изобразим сумматор, который ведет суммиро-

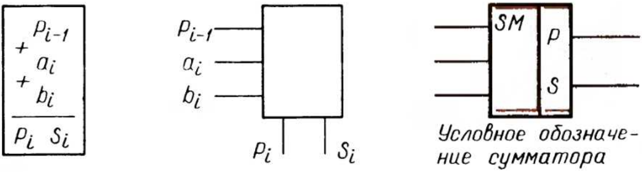


Рис. 22

Таблица 18

a_i	b_i	P_{i-1}	P_{i+1}	S_i
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	1	1	0
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1
0	0	0	0	0

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & +1 & +0 & +0 & +1 & +1 & +0 & +0 \\ +1 & +0 & +1 & +0 & +1 & +0 & +1 & +0 \\ \hline 11 & 10 & 10 & 01 & 10 & 01 & 01 & 00 \end{array}$$

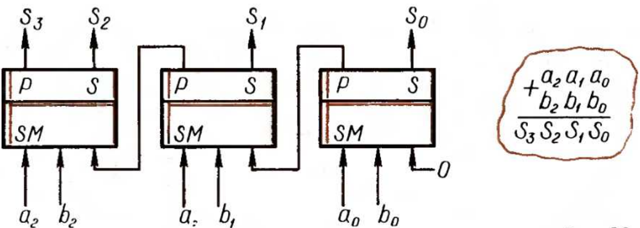


Рис. 23

вание в i-м разряде, в виде «черного ящика» (рис. 22).

Напомним, что все переменные a_i, b_i, S_i, P_{i-1} и P_{i+1} принимают только два значения: 0 и 1. Составим таблицу 18, задающую функции $S_i(a_i, b_i, P_{i-1})$ и $P_{i+1}(a_i, b_i, P_{i-1})$. Рядом показаны все случаи суммирования в i-м разряде.

Несколько сумматоров, соединенных друг с другом так, как показано на рисунке 23, образуют устройство для сложения двух многоразрядных двоичных целых чисел.

В заключение рассмотрим еще одну задачу, решение которой основывается на правильно подобранной булевой функции.

Пусть имеется плакат с фамилиями русских поэтов и писателей (рис. 24, а). Предложите товарищу выбрать одну из фамилий и, не называя ее, указать, в каких колонках (считая справа налево) она встречается. Если он скажет, например, что фамилия встречается только во второй и третьей колонках, то вы сразу определите, что речь идет о Грибоедове, а если только в первой и второй — о Крылове.

Необходимо сконструировать логическое устройство, которое получает сигналы о том, в каких колонках встречается задуманная фамилия, и догадывается, о ком идет речь. Рядом с отгаданной фамилией зажигается лампочка.

Действуем по уже известному плану. Необходимое устройство представляем в виде черного ящика (рис. 24, б). Оно имеет три входа и семь выходов.

Если фамилия встречается во второй и третьей колонках, то $K_1 = K_3 = 1$, $K_2 = 0$, если во второй и третьей, то $K_2 = K_3 = 1$, $K_1 = 0$. Зададим искомую булеву функцию таблично (табл. 19).

Функциональная схема автомата-отгадчика изображена на рисунке 25.

ЛЕРМОНТОВ	ПУШКИН	КРЫЛОВ
ТОЛСТОЙ	КРЫЛОВ	НЕКРАСОВ
ПУШКИН	ГРИБОЕДОВ	ТОЛСТОЙ
ГРИБОЕДОВ	ГОНЧАРОВ	ПУШКИН

а

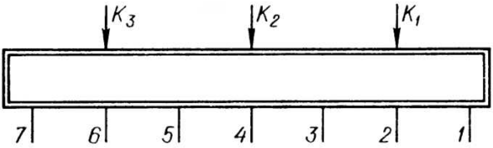


Рис. 24 б

Таблица 19

Фамилия		Двоичное число K_3	Двоичное число K_2	Двоичное число K_1	Восьмеричная цифра
ПУШКИН	1	1	1	1	7_8
ГРИБОЕДОВ	1	1	1	0	6_8
ТОЛСТОЙ	1	1	0	1	5_8
ЛЕРМОНТОВ	1	1	0	0	4_8
КРЫЛОВ	1	0	1	1	3_8
ГОНЧАРОВ	1	0	1	0	2_8
НЕКРАСОВ	1	0	0	1	1_8
	0	0	0	0	0_8

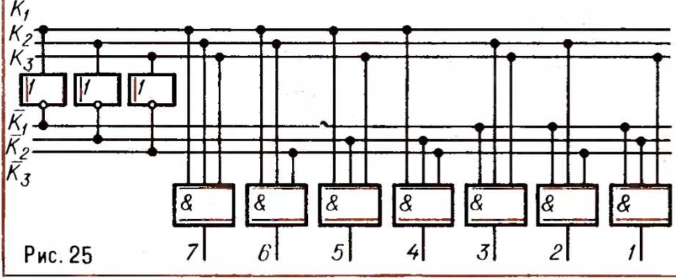
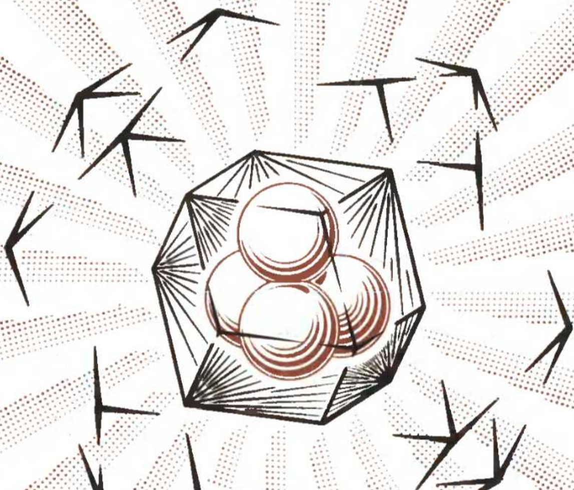


Рис. 25

II.

ГРАФЫ— ЯЗЫК ОБЩЕНИЯ С ЭВМ



1. ИСТОКИ ТЕОРИИ. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ

Задача о печатной схеме

Многим школьникам, занимающимся изготовлением радиоприборов, часто приходится задумываться над конструкцией так называемых печатных схем.

Печатная схема — это пластинка из какого-либо токонепроводящего материала (изолятора), на которой в виде металлических полосок вытравлены токопроводящие дорожки. Пересекаться токопроводящие дорожки не должны, это вызовет замыкание электрической цепи. Токопроводящие дорожки могут пересекаться только в указанных точках. В эти точки на плате устанавливаются необходимые элементы — диоды, триоды, резисторы, конденсаторы и другие.

На рисунке 26 изображена часть пластинки, на которой необходимо соединить дорожками пары точек, обозначенных одной и той же буквой. Выходить за границу пластинки и пересекать ее нельзя.

Решение найти нетрудно. Оно приведено на рисунке 27.

В ходе решения задачи мы занимались вычерчиванием **графа**-фигуры, состоящей из отдельных вершин, соединенных дугами. В вычерченном графе 10 вершин и 5 дуг.

Всегда ли такого рода задачи решаются столь легко?

Попробуйте свои силы в решении задачи, аналогичной данной, и сконструируйте печатную схему, в которой каждую из точек A, B и C необходимо соединить с точками F, G и H. Расположение точек на плате до начала работы указано на рисунке 28. Выходить за границы пластинки запрещено.

Попытки сконструировать такую схему не приводят к успеху. Оказывается, это невозможно в принципе. Доказательство следует из рисунка 29, где показано, как точки A, B и C соединены с точками E и G (точка F еще не использовалась). Шесть дуг разбили плоскость схемы на три замкнутые области: I, II и III. Ясно, что точка F должна находиться только в одной из них; если она будет находиться в области I, то F невозможно соединить с вершиной B, если же F окажется в области II, то ее невозможно соединить с вершиной A, и, наконец, если F будет находиться в области III, то ее невозможно соединить с вершиной G.

Неожиданное решение, ведь в предыдущей задаче печатная схема казалась более сложной — в ней 10 вершин, а здесь всего 6.

Возникает вопрос, нельзя ли найти общий принцип оценки таких печатных схем? Нельзя ли заранее сказать, какую схему можно вычертить, а за какие и браться не следует?

Задача о печатной схеме переросла в задачу о так называемых плоских графах. Задача конструкторская предстала перед нами как задача математическая, как задача на исследование свойств плоских графов.

Уточним понятие о плоском графе. *Плоским графом* будем называть множество точек плоскости — *вершин*, соединенных между собой линиями — *ребрами*, лежащими в этой же плоскости, причем никакие два ребра не пересекаются.

Условимся представлять себе ребра в виде эластичных нитей, которые могут удлиняться, укорачиваться и как угодно изгибаться, оставаясь в плоскости. Это

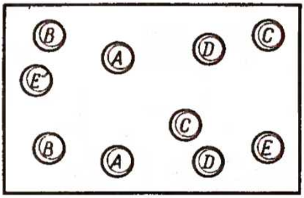


Рис. 26

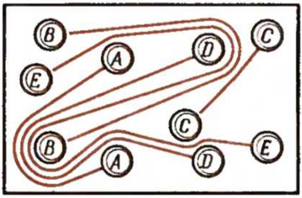


Рис. 27

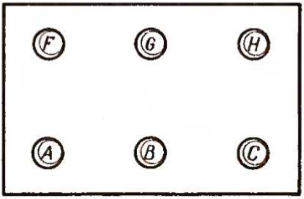


Рис. 28

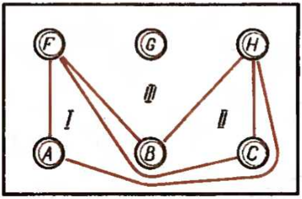


Рис. 29

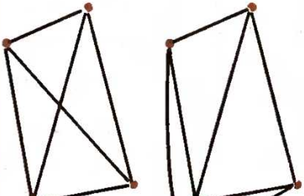


Рис. 30

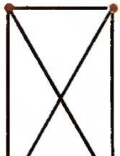


Рис. 31

позволяет любой граф изображать по-разному. На рисунке 30 один и тот же граф, имеющий 4 вершины и 6 ребер, изображен тремя способами.

Среди плоских графов особое значение имеют полные плоские графы, то есть графы, у которых каждая пара вершин соединена ребром. На рисунке 31 изображен именно полный плоский граф с 4 вершинами.

Задача о графопостроителе

Хорошо известно, что современные ЭВМ снабжены различными внешними устройствами, с помощью которых они получают информацию и выдают ее по мере решения задачи. Одним из таких устройств является графопостроитель. С помощью графопостроителя ЭВМ вычерчивает на бумаге различные линии: графики исследуемых функций, планы и др. Иногда она использует несколько цветных перьев — рисунки получаются яркими и выразительными.

Ясно, что наиболее просто вычерчивается линия (граф), если графопостроителю не нужно отрывать пера от бумаги — он начал вычерчивание и ведет его, не останавливаясь.

Оказывается такая задача возникла в теории графов давно, она связывается с именем выдающегося отечественного математика Л. Эйлера и формулируется обычно так: **заданный плоский граф необходимо вычертить, не отрывая карандаша от бумаги, не обводя дважды одно и то же ребро, и вернуться в исходную вершину графа.**

Л. Эйлер в 1736 г. показал:

если все вершины плоского или пространственного графа четны, то задача разрешима;

нечетной (четной) вершиной графа называется вершина, из которой выходит нечетное (четное) число ребер;

если две вершины нечетны, то выйдя из одной нечетной вершины, можно вернуться в другую, не проходя ни по одному из ребер дважды;

Рис. 32

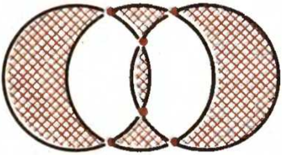


Рис. 33

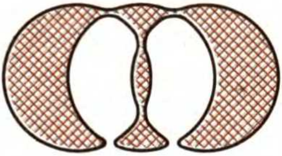


Рис. 34

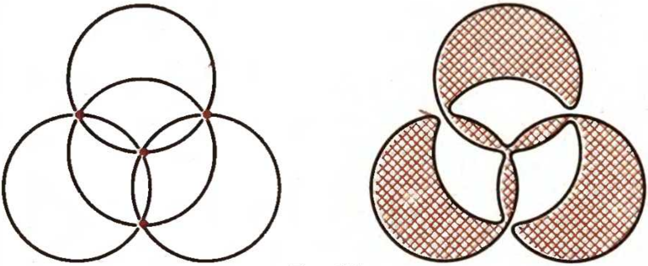


Рис. 35

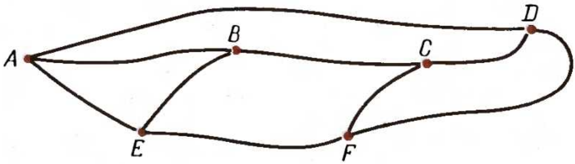


Рис. 36

если нечетных вершин $2k$, то существует k путей, начинающихся и заканчивающихся в нечетных вершинах.

На рисунке 32 показан граф, который можно обвести, не отрывая карандаша от бумаги. У данного графа 6 вершин, и каждая из них четная. Откуда же начинать вычерчивание?

Существует следующий способ вычерчивания: **в данном графе следует выбрать одну область и заштриховать ее; область, граничащую с заштрихованной, пропустить (не штриховать), а имеющую лишь общую вершину заштриховать, и так действовать до тех пор, пока все возможные области не будут заштрихованы.**

В данном случае исходный граф после штриховки будет иметь вид, представленный на рисунке 33.

Далее заштрихованный граф следует разъединить в одной или нескольких вершинах так, чтобы образовалась односвязная (без «дыр») заштрихованная область. В данном случае разъединение приведет к рисунку 34, из которого видно, что заштрихованную область можно охватить сплошной линией, например окружностью.

Описанный метод иллюстрирует граф, изображенный на рисунке 35; разъединение исходного графа осуществлено в четырех местах.

Таким образом, теория графов не только дала условия разрешимости задачи, а и указала метод отыскания требуемого обхода графа. Этим самым математика еще раз продемонстрировала свою мощь.

Рассказ об эйлеровых графах завершим рассмотрением практической задачи, при решении которой выводы Эйлера будут необходимы.

Городская трамвайная сеть после ряда перестроек имеет вид, представленный на рисунке 36. Требуется установить минимальное число маршрутов, обеспечивающих движение пассажиров из одного любого пункта в любой другой. Пассажиры могут пересаживаться с одного маршрута на другой только на перечисленных остановках A, B, C, D, E и F. Каждый трамвай должен двигаться только по своему маршруту.

Исходя из вышесформулированных условий существования эйлерова графа, заключаем, что данный граф (схема трамвайного движения) не является эйлеровым, так как в нем 6 нечетных вершин, однако он может быть разбит на три эйлеровых. Соответствующие маршруты начинаются и завершаются в нечетных вершинах.

Найти три таких маршрута предлагаем читателю самостоятельно.

Задача о коммивояжере (посыльном)

Имеется k городов, расстояния между которыми известны; коммивояжер отправляется в путь из одного из них с тем, чтобы посетить все остальные $(k-1)$ города ровно по одному разу каждый и вернуться в исходный город.

Как найти кратчайший маршрут?

На рисунке 37 изображена примерная схема района действия коммивояжера; буквами A, B, C, D и E обозначены города. Коммивояжер начинает и завершает свой путь в городе A.

Из сказанного следует, что задача о коммивояжере — это задача об отыскании пути на графе. Выше уже была рассмотрена одна задача о пути на графе, в ней требовалось обойти граф, так, чтобы путь пролегал по каждому ребру только один раз. Такие маршруты на графе называют *эйлеровыми*. В новой задаче требуется найти такой путь на графе, чтобы любая его вершина была пройдена только один раз. Такие пути на графе называют *гамильтоновыми* в честь ирландского математика У. Гамильтона (1805—1865).

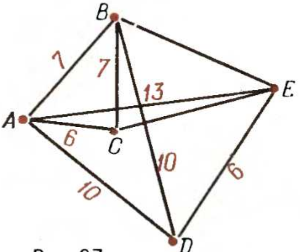


Рис. 37

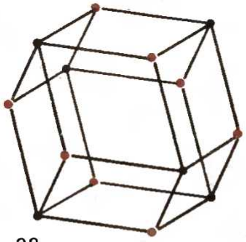


Рис. 38

Выше было рассказано о том, что математикам удалось найти условия существования эйлеровых путей на графе и был продемонстрирован метод прокладки таких путей. Итак, задача Эйлера решена полностью.

На первый взгляд, по аналогии с задачей об отыскании эйлеровых путей, задача о нахождении гамильтоновых путей кажется разрешимой. Однако это не так: не удалось сформулировать требований, которым должен удовлетворять граф, чтобы на нем от вершины к вершине можно было бы провести гамильтонов путь.

Известно, в частности (это показал сам У. Гамильтон), что каркасы многих правильных многогранников являются гамильтоновыми графами (на них можно провести гамильтонов путь).

Есть однако, многогранники, не являющиеся гамильтоновыми. Например, ромбический додекаэдр, изображенный на рисунке 38.

На этом графе число черных вершин 6, а синих 8. Расположены они на каждой грани чередуясь. Таким образом, построить маршрут, при котором переход от вершины к вершине сопровождается переменной их вида, невозможно. (Для этого необходимо, чтобы и черных и синих вершин было одинаковое число).

Еще раз подчеркнем, что в общем случае задача о построении гамильтоновых путей (а значит, и задача о коммивояжере) не решена так, как это хотелось бы математикам.

Главная неудача в том, что не найдены условия существования такого пути.

Вообще говоря, решить эту задачу в принципе просто, поскольку число всех возможных маршрутов конечно (например, число маршрутов, начинающихся и завершающихся в городе A, равно $n=(k-1)!$), но организовать полный перебор всех без исключения маршрутов, вычислить их длины и выбрать самый короткий — работа, требующая огромных вычислений.

Если число городов невелико, то полный перебор всех маршрутов, например начинающихся и завершающихся в городе A, можно хорошо организовать, воспользовавшись вспомогательным графом, называемым граф-деревом.

На рисунке 39 изображен граф-дерево, на котором указаны все 24 возможных маршрута, начинающихся и завершающихся в городе A. Жирной линией выделен самый короткий маршрут. Для сравнения штриховой линией выделены более длинные маршруты. Читатель может сам проверить, что число маршрутов совпадает с тем, которое находим по формуле $n=(k-1)!$ (в данном случае $k=5$).

Отметим одно существенное обстоятельство: в задаче о движении между городами молчаливо предполагалось, что $|AB|$ — расстояние от города A до города B равно обратному расстоянию $|BA|$. Однако это не всегда так. Представьте себе, что автолавка, выступает в роли коммивояжера и объезжает k предприятий города. Возможно, что некоторые из улиц, по которым она проезжает, с односторонним движением, и это, естественно нарушит условие $|AB|=|BA|$, ведь из A в B он едет по одним улицам, а из B в A — по другим.

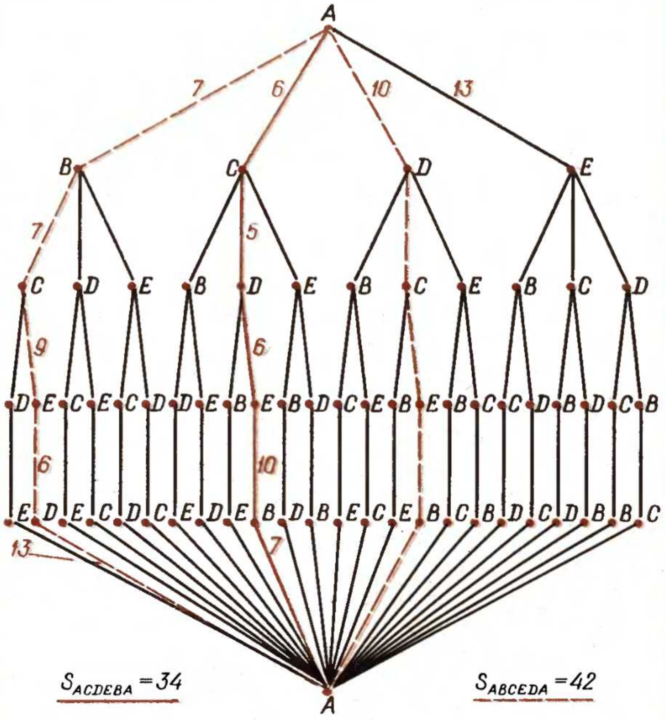


Рис. 39

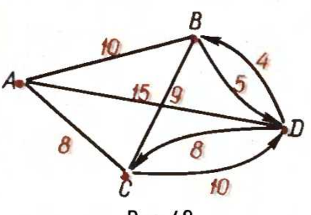


Рис. 40

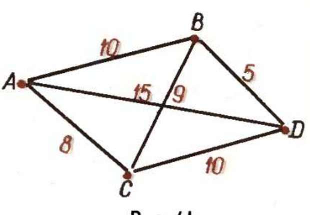


Рис. 41

Из сказанного ясно, что схема района должна быть уточнена: необходимо указать не только расстояние от вершины A к вершине B, но и обратное расстояние. Для этого придется ребро, идущее от A в B, отличать от ребра, идущего из B в A. Делается это с помощью стрелки. Ребро, обозначенное стрелкой, называют ориентированным (рис. 40). Решение задачи на графе, содержащем ориентированные ребра, более сложно, чем на графе, все ребра которого разрешают двустороннее движение.

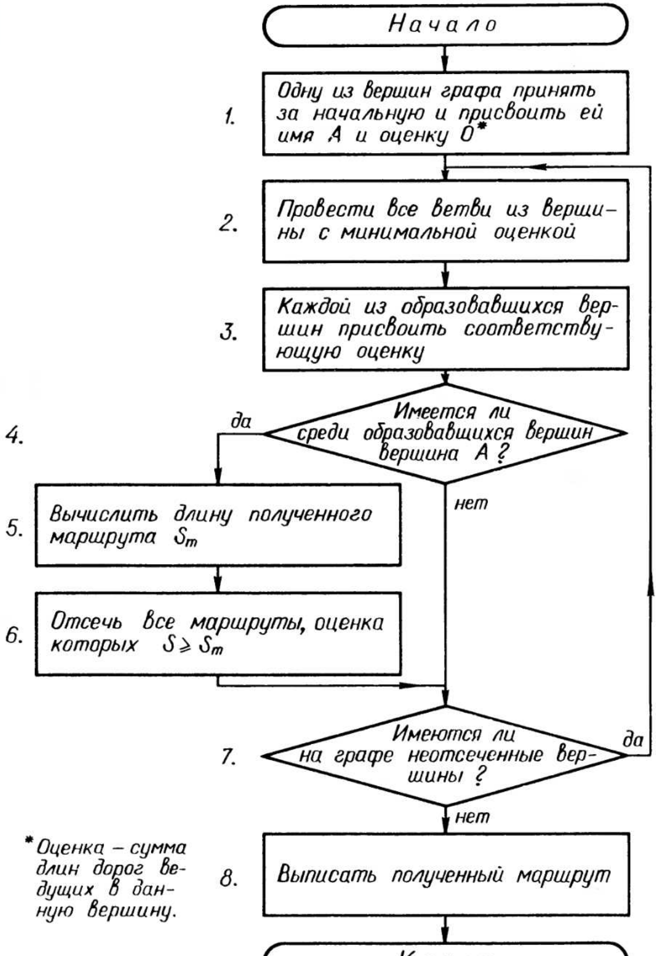
Вернемся к проблеме решения задачи методом полного перебора всех возможных вариантов. Метод кажется очень простым, тем более что граф-дерево помогает этот перебор проводить организованно. Но эта простота обманчива, поскольку число маршрутов, равное $(k-1)!$ очень быстро растет по мере увеличения количества вершин графа. Так, $5!=120$, а уже $10!=$ $=3\,628\,800$. Сопоставить и оценить такую массу маршрутов трудно даже с помощью ЭВМ.

И все-таки перебор маршрутов иногда бывает полезен. Удалось создать метод решения задачи, в соответствии с которым шаг за шагом строится не полное, а усеченное граф-дерево — часть ветвей в ходе его «выращивания» отсекается, а оставшиеся ветви ведут к решению. Этот метод называется методом ветвей и границ.

Пусть граф, на котором отыскивается кратчайший гамильтонов маршрут, изображен на рисунке 41. Раскроем существо метода ветвей и границ на примере задачи, алгоритм решения которой в виде блок-схемы представлен на рисунке 42.

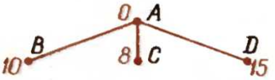
В ходе решения задачи постепенно, шаг за шагом, будет выращиваться дерево, некоторые ветви которого отсекаются. На рисунке 43 процесс выращивания дерева показан в деталях.

Специалисты утверждают, что описанный вариант

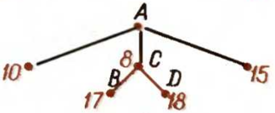


* Оценка — сумма длин дорог ведущих в данную вершину.

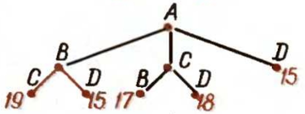
Рис. 42



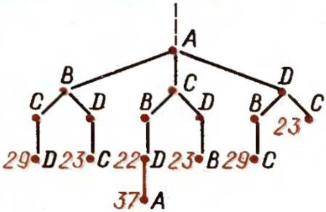
Выполнены 1, 2, 3, 4 и 7 пункты алгоритма.
Цветом показаны ветви проведенные на данном шаге.



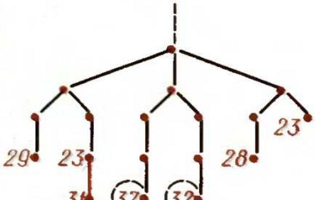
Выполнены 2, 3, 4, 7 пункты алгоритма.



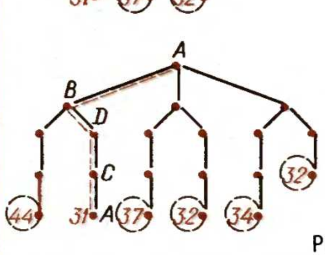
Выполнены 2, 3, 4, 7 пункты алгоритма.



Впервые завершено построение послного варианта маршрута, выполнены 2, 3, 4, 5, 7 пункты алгоритма.



Выполнены 2, 3, 4, 5, 6, 7 пункты алгоритма. Отсечены вершины с весом в 32 и 37 единиц.



Работа алгоритма завершена, получен искомый маршрут: $S_{ABDCA} = 31$

Рис. 43

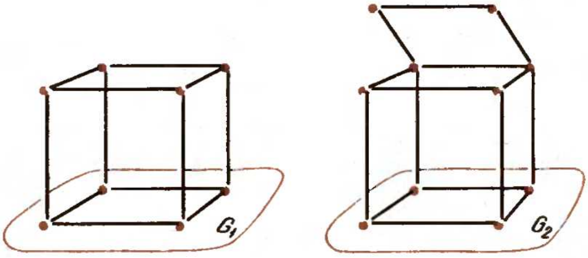


Рис. 44

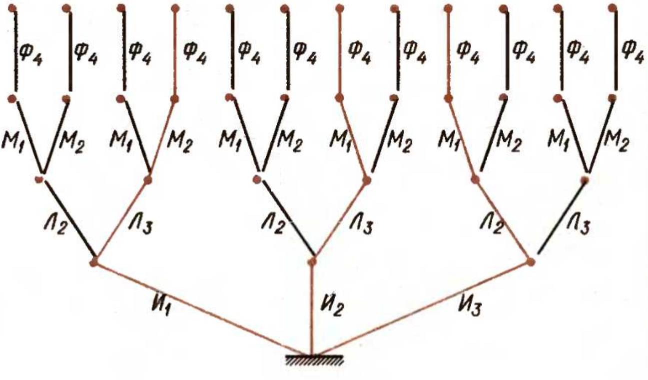
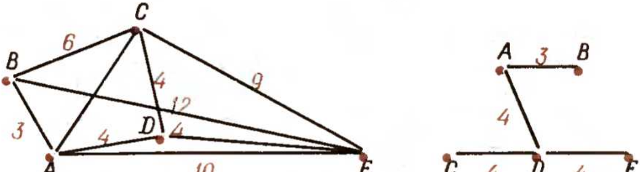


Рис. 45



а Рис. 46 б

метода ветвей и границ может успешно применяться на ЭВМ для задач с $k \leqslant 20$.

Известны и другие варианты этого метода, позволяющие с помощью ЭВМ решать задачу для $k \leqslant 40$ и даже для $k \leqslant 120$.

Еще раз подчеркнем, что задача о коммивояжере, если понимать ее в самом общем виде, оказалась задачей «на графе»: дана некоторая граф-схема, и на ней необходимо найти требуемый путь. Постановка задачи потребовала применения графа и, что самое интересное, решение ее также требует использования графа — один из лучших способов решения оказался основанным на применении графа типа дерево.

Выше было сказано, что общего решения задачи о проведении гамильтоновых путей на графах не найдено. Однако, поиски такого решения продолжаются.

В заключение приведем найденное достаточное условие существования гамильтонова пути на графе.

Если степень каждой вершины (число ребер, выходящих из нее) **графа, который имеет n вершин ($n \geqslant 3$), не меньше $\frac{n}{2}$, то на этом графе можно построить гамильтонову линию.**

Это формально звучащее утверждение можно пересказать так: **если в группе из n человек ($n \geqslant 3$) каждый имеет по крайней мере $\frac{n}{2}$ знакомых, то всю группу можно усадить вокруг стола таким образом, что каждый из них будет знаком с двумя соседями по столу.**

Это условие предъявляет требования, которые в ряде случаев можно ослабить. На рисунках 44 приведены два графа; один (куб) имеет 8 вершин, степень каждой вершины равна трем, другой (решетка призмы) — 10 вершин, часть которых имеет степень 2, а часть — 3 (не выполняется требование о степени каждой вершины графа: $2 \leqslant 5$ и $3 \leqslant 5$).

Отметим, что необходимое условие существования гамильтонова пути на графе пока не найдено.

Задача о расписании

Необходимо составить фрагмент расписания для одного дня занятий с учетом следующих обстоятельств:

1) учитель истории может дать либо первый, либо второй, либо третий уроки, то только один урок;

2) учитель литературы может дать один, либо второй, либо третий урок;

3) математик готов дать либо только первый, либо только второй урок;

4) преподаватель физкультуры согласен дать только последний урок.

Сколько вариантов расписания, удовлетворяющего всем этим условиям одновременно, может составить завуч школы?

Решение задачи будет наиболее простым, если вычертить граф в виде дерева. Требуемый граф изображен на рисунке 45.

На графе выделены три возможных варианта расписания уроков. Приведенный пример — один из многих случаев удачного применения графов, заданных в виде деревьев.

Рассмотрим пример еще одной задачи, решением которой является граф в виде дерева.

Требуется построить дорожную сеть так, чтобы любые два из n городов были соединены дорогой. Пути при этом должны пересекаться только на разных уровнях (одна дорога пересекает другую, проходя либо над ней, либо под ней). С дороги на дорогу можно перейти только в каком-нибудь из городов.

Паскаль Блез

(1623—1662)

Французский математик, механик, физик и философ. Родился в Клермон-Ферране. Занимался математикой под руководством своего отца.

Первый трактат «Опыт теории конических сечений» (1640) написал в 16-летнем возрасте. В нем содержится одна из основных теорем проективной геометрии. В 1641 сконструировал свою первую суммирующую машину, окончательный вариант которой построил в 1644. Всего построил более 50 машин.

Основное направление исследований — геометрия. Открыл метод полной математической индукции, внес важный вклад в идеи, на базе которых было создано интегральное исчисление. Является одним из создателей теории вероятностей.

Внес основополагающий вклад в становление гидростатики: установил закон распределения давления в жидкостях (закон Паскаля), принцип действия гидравлического пресса, указал на общность законов равновесия жидкостей и газов. В 1648 под его руководством был проведен опыт, подтвердивший существование атмосферного давления. Сформулировал также ряд законов в области метеорологии.

Каким образом следует построить сеть дорог, чтобы общая протяженность путей была наименьшей?

Одним из самых простых алгоритмов построения требуемого графа является метод, предложенный польским математиком Г. Штейнгаузом (1887—1972).

Выбрав любой город, его следует соединить с ближайшим соседним, а затем то же самое сделать со

Математик, механик, физик и астроном, академик Петербургской АН (с 1726 по 1741 и с 1766). Родился в Базеле. Окончил Базельский университет (1724). В 1726 Эйлер был приглашен в Петербургскую АН и в мае 1727 прибыл в Петербург. С 1726— адьюнкт физиологии, позднее — математики, с 1731 — профессор физики и теоретической механики, 1731—1741— профессор математики. В 1741 переехал в Берлин, где прожил 25 лет. С 1744 — директор Математического класса Берлинской АН. В 1766 возвратился в Петербург. Вскоре почти полностью потерял зрение.

Научные интересы Эйлера относились ко всем основным областям естествознания, к которым можно было применить математические методы.

Список трудов Эйлера содержит около 850 названий, в их числе ряд многотомных монографий; из них при жизни было опубликовано около 550.

Иностранный почетный член Петербургской АН (с 1742 по 1766), член Парижской АН, Берлинской АН, Лондонского королевского общества и многих других академий наук и научных обществ.

Эйлер Леонард

(1707—1783)

всеми остальными городами. Если образовалась сеть, охватывающая все города, то задача решена. Если вместо единого дерева получился лес не связанных друг с другом деревьев, то необходимо выбрать одно их них и провести кратчайший путь, соединяющий город на этом дереве с городом другого дерева. Если решение еще не получено, то с другими деревьями следует поступить аналогично.

Покажем пример применения этого алгоритма для городов, расположенных так, как на рисунке 46, а.

Действуем следующим образом: город A соединяем с городом B, город C соединяем с D и город D соединяем с E. В результате получаем два дерева — одно из них с двумя, а второе с тремя вершинами.

В соответствии с алгоритмом соединяем эти два дерева кратчайшим путем, которым оказался путь из A в D, после чего получилась сеть (рис. 46, б). Общая протяженность всех путей в сети 15 км.

Задача о назначениях

Как правильно распределить обязанности между членами бригады? Как найти лучший вариант укомплектования экспедиции специалистами? Как назначить исполнителей на роли в новой пьесе?

Ответить на любой из этих вопросов — это значит решить так называемую задачу о назначениях. Очень часто решение таких задач требует не только смекалки, а и точного расчета, знания методов их решения. Часто требования, предъявляемые к кандидатам, бывают чрезвычайно разнообразными — без теории обойтись просто невозможно. Интересно, что и в этом случае на помощь приходят графы.

В составе экспедиции должно быть 6 специалистов: биолог, врач, синоптик, гидролог, механик и радист. Имеется 8 кандидатов, из которых и нужно выбрать 6 участников экспедиции. Условные имена претендентов: A, B, C, D, E, F, G и H. Обязанности биолога могут выполнять E и G, врача — A и D, синоптика — F и G, гидролога — B и F, радиста — C и D, механика — C и H. Предусмотрено, что в экспедиции каждый из них будет выполнять только одну обязанность.

Кого и в какой должности следует включить в экспедицию, если F не может ехать без B, D — без H и без C, C не может ехать вместе с G, A — вместе с B?

Процесс решения задачи во всех деталях мы рассматривать не будем. Заметим только, что задать возможный вариант решения, то есть описать точный состав экспедиции, можно с помощью так называемого четного графа. Четным называется граф, вершины которого разделены на две группы, а ребра могут соединять лишь вершины разных групп (вершины одной и той же группы между собой не соединяются).

Применительно к задаче об экспедиции одна группа вершин есть группа из 8 кандидатов (A) и вторая — из 6 должностей (B).

Решение задачи изображено на четном графе (рис. 47).

Это решение является единственным, которое полностью удовлетворяет всем приведенным в условии задачи требованиям.

Рассказ об этой задаче позволил познакомить читателя с важным типом практических задач и тем, как при их решении применяются графы нового вида — четные графы.

Аналогичные задачи решают не только с помощью четных графов, а и с использованием раскрашивания вершин и ребер таких графов. Дополнительная раскраска вершин увеличивает наглядность ответа и ускоряет процесс решения задачи.

Приведем пример.

На фестивале встретились шесть делегатов. Оказалось, что из любых трех по крайней мере два могут объясниться на одном из языков.

Доказать, что найдутся три делегата, каждый из которых может объясниться с каждым из этой тройки.

Пусть каждому делегату соответствует вершина. Если два делегата могут объясниться между собой, то вершины соединяются синим ребром, а если объясниться

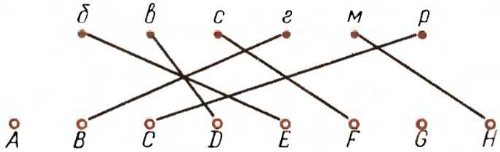


Рис. 47

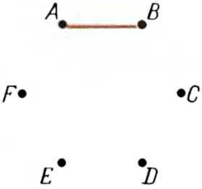


Рис. 48

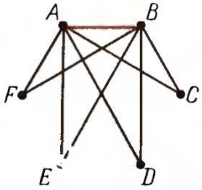


Рис. 49

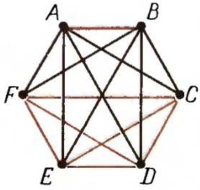


Рис. 50

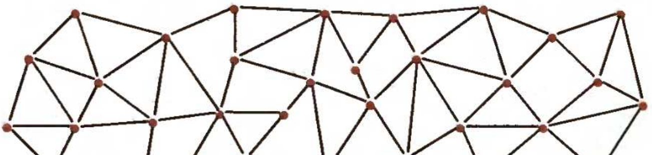


Рис. 51

не могут — черным ребром. Положим для определенности, что делегаты A и B могут объясниться между собой. (На рисунке 48 изображен этот момент рассуждений.)

Далее рассматриваем тройки, в которые могут входить A и B; это такие тройки: ABF, ABC, ABD и ABE.

Остановимся на тройке ABC. Вершину C соединим с вершинами A и B черными ребрами. Это означает, что в этой тройке только A и B могут объясниться между собой.

Рассуждая аналогично, ребра (A, D), (B, D), (A, E), (B, E), (A, F), (B, F) также изображаем черными и получаем граф, изображенный на рисунке 49.

Рассмотрим теперь тройки, в которые входит вершина A и не входит вершина B, например тройку AFC. В ней ребро (F, C) необходимо изобразить жирной линией (иначе получится, что в этой тройке нет двух делегатов, которые могут объясниться друг с другом). Аналогично рассуждая относительно вершины B, приходим к необходимости изобразить жирной линией ребра (E, D), (D, C), (F, E), (E, C), (F, D). Граф после этого становится таким, как показано на рисунке 50.

Обнаруживаем, что в нем нашлись не одна, а три тройки делегатов, которые могут свободно общаться друг с другом. Это — EFC, EFD, DFC.

Задача о рисовых полях

Известно, что при выращивании риса небольшие участки земли — чеки — заливают водой, а позднее, перед снятием урожая, эту воду спускают. Карта большого рисового поля, состоящего из многих чеков, имеет очень причудливую формулу (рис. 51).

Вода в чеки поступает сверху, со склона. Для заполнения чеков нужно в некоторых земляных плотинах, отгораживающих чеки друг от друга, открыть проходы и после заполнения водой их закрыть. Для спуска воды эти проходы вновь открываются.

Сколько стенок (земляных плотин) следует разрушить при заполнении водой?

Гамильтон Уильям Роуан

(1805—1865)

Ирландский математик, член Ирландской АН (с 1837), в 1837—1845 — ее президент. Родился в Дублине. Научные таланты Гамильтона проявились рано: уже в возрасте 13 лет он достаточно свободно владел 13 языками, в 16 лет, изучая «Небесную механику» П. С. Лапласа, обнаружил в ней ошибку в доказательстве параллелограмма сил. Окончил Дублинский университет (1827). Работал там же (с 1827— профессор).

Основные работы посвящены математической оптике, механике, вариационному исчислению. Развил (1830—1837) математическую оптику, а затем распространил свои методы на механику. Исследовал теорию комплексных чисел. Идею комплексных чисел распространил на пространство, определив четыре единицы: 1, i, j, k, связанные соотношениями $i^2=j^2=k^2=-1$, $ij=-ij=k$, $jk=-kj=i$, $ki=-ik=j$.

Решение этой задачи очень простое, если воспользоваться теорией графов. На карту, изображенную на рисунке 51, следует смотреть как на граф, имеющий циклы — каждый чек ограничен циклом. Очевидно, что для пуска воды (или ее выпуска) достаточно в каждом цикле разрушить (удалить) одно ребро. Если разрушить по одному ребру в каждом цикле, то оставшиеся целыми земляные плотины образуют граф типа

Английский математик. Родился в Линкольне. Самоучка; самостоятельно изучил греческий, латинский, немецкий, французский и итальянский языки, затем математику. С 16 лет работал помощником учителя в школе. В 1849—1864 — профессор математики в Куинс-колледж в Корке (Ирландия).

Научные интересы Буля достаточно широки: философия, логика, математический анализ, теория вероятностей. Развил свою систему и изложил ее в труде «Исследование законов мышления» (1854), в котором свел логику к алгебраической форме, установив систему аксиом символической логики, т.е. операции исследования и решения «логических» уравнений. Логическое исчисление Буля получило название булевой алгебры. В 40—50-х гг. XX в. булева алгебра получила особенное значение в связи с развитием вычислительной техники.

Член-корреспондент Петербургской АН (с 1837), член многих академий наук и научных обществ.

Буль Джордж

(1815—1864)

дерево. В этом дереве вершин будет столько же, сколько и до удаления ребер, а именно — n. Число ребер в любом дереве всегда равно $(n-1)$. Отсюда следует, что если до удаления в графе было N ребер (земляных плотин), то удалить пришлось $K=N-(n-1)=N-n+1$ ребер. Число K есть увеличенная на единицу разность между числом ребер N и числом вершин n.

2. ИГРА И ГРАФ

Графы с успехом применяются для записи беспроигрышных стратегий в играх. Это еще одна очень интересная и полезная область использования графов. Покажем, как оформляется в виде графа беспроигрышная стратегия в игре «Побеждает чет». Располагая таким графом, можно успешно соперничать с любым игроком — граф подскажет как вести игру.

Перед началом игры имеется группа, содержащая некоторое нечетное число предметов, например 25. Играют двое, ходят по очереди. Сделать ход — это значит отделить от общей группы 1, 2, 3 или 4 предмета. В процессе игры общая группа уменьшается, а каждый из играющих накапливает предметы. Победителем считается тот, кто сумеет к концу игры накопить четное число предметов.

Беспроигрышная стратегия состоит в том, чтобы вступить в игру вторым и действовать в дальнейшем так, как это предписывается графом, изображенным на рисунке 52.

В отличие от ранее рассмотренных графов в данном, задающем беспроигрышную стратегию, имеются ориентированные ребра и ребра, начинающиеся и завершающиеся в одной и той же вершине — такие ребра называются петлями.

Вершины графа обозначают состояния игры, число

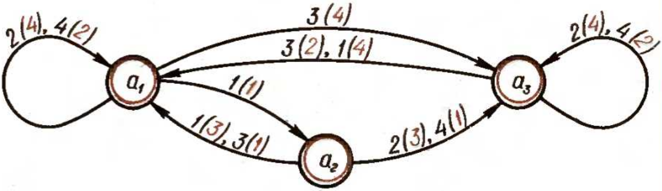


Рис. 52

Игра начинается в состоянии a_1. Первым в неё вступает игрок В

Пусть игрок В делает ход: „беру 3 предмета". В ответ игрок А ходит: беру 4 предмета" и для себя замечает, что игра перешла из состояния a_1 в состояние a_3

Ситуация после первого хода:

Таблица 20

Номер хода	*ход В*	*ход А*	*В какое состояние переходит игра*
1	3	4	a_3

Второй ход игрока В: „беру 4 предмета".

Ответный ход А: „беру 2 предмета" (игра остается в состоянии a_3 — так подсказывает петля

Ситуация после второго хода:

Таблица 21

Номер хода	*ход В*	*ход А*	*В какое состояние переходит игра*
1	3	4	a_3
2	4	2	a_3

Морган
Огастес де
(1806—1871)

Шотландский математик и логик, член Лондонского королевского общества. Родился в Мадуре (Индия). С 1823 учился в Кембриджском университете. В 1828—1831 и 1836—1866 — профессор Университетского колледжа в Лондоне.

Работы посвящены основаниям алгебры, арифметике, математическому анализу, теории вероятностей и логике. Был инициатором применения логических исчислений к обоснованию теорем теории вероятностей. Работал над созданием символического исчисления и в области истории математики.

Основатель Лондонского математического общества и его первый президент (с 1866), член Королевского астрономического общества.

которых в игре при данных условиях равно трем. В процессе игры одно состояние может смениться на другое так, как указывают стрелки.

Состояния в игре меняются, переход в новое состояние зависит от того, какой ход избрал тот или иной соперник.

Рядом с каждым ребром графа выписано две цифры a (b). Эта запись означает: на ход соперника «беру a предметов» следует ответить ходом «беру b пред-

Английский математик, член Лондонского королевского общества (с 1852). Родился в Ричмонде. До 1838 жил в Петербурге. Окончил Кембриджский университет (1841). В 1843—1863 занимался адвокатурой, одновременно проводил математические исследования, с 1863— профессор Кембриджского университета.

Основные математические работы относятся к алгебре и алгебраической геометрии. Начал (1858) разработку теории матриц. Заложил основы теории алгебраических инвариантов. Разработал основные понятия абстрактной теории конечных групп. Установил существование связи между теорией инвариантов и проективной геометрией. На его исследованиях базируется так называемая интерпретация Кэли-Клейна геометрии Лобачевского. Изучал геометрию в пространстве n измерений, теорию дифференциальных уравнений. Занимался небесной механикой, кинематикой механизмов.

Член-корреспондент Петербургской АН (с 1870).

Кэли Артур

(1821—1895)

метов» и считать, что игра находится в том состоянии, в которое ведет ориентированное ребро (рядом с ним написано a (b)).

Приведем пример поединка между соперниками A и B, когда игрок A пользуется во время игры графом, изображенным на рисунке 52. В игру первым вступает игрок B. Игра начинается в состоянии a_1.

Пусть игрок B делает ход: «беру 3 предмета». В ответ игрок A ходит: «беру 4 предмета» и для себя замечает, что игра перешла из состояния a_1 в состояние a_3.

После первого хода имеем ситуацию, представленную в таблице 20.

Второй ход игрока B: «беру 2 предмета».

Ответный ход A: «беру 4 предмета» (игра остается в состоянии a_3 — так подсказывает петля).

После второго хода имеем ситуацию, представленную в таблице 21.

Третий ход игрока B: «беру 1 предмет».

В ответ игрок A делает ход: «беру 4 предмета» (игра переходит в состояние a_1).

Ситуация после третьего хода представлена в таблице 22.

Четвертый ход игрока A: «беру 4 предмета». Ответный ход игрока A: «беру 2 предмета» (игра остается в состоянии a_1).

Ситуация после четвертого хода представлена в таблице 23.

Ясно, что оставшийся последний предмет достанется игроку B, ведь еще можно сделать один ход. Победил в этом поединке игрок A — он действовал в соответствии с беспроигрышной стратегией, выраженной графом.

Стратегии многих игр удобно задавать в виде графов.

Графы, содержащие петли, применяются и для описания процессов, не связанных с играми. Рассмотрим, например, как с помощью такого графа можно описать работу автомата для продажи газет стоимостью 4 к. Ясно, что автомат должен подсчитать сумму последовательно вводимых монет, и если сумма окажется равной 4, 5 или 6 копейкам (2 монеты по 3 к.— других нет), то он должен выдать билет и соответствующую сдачу.

Третий ход игрока В: „беру 1 предмет".
В ответ игрок А делает ход: „беру 4 предмета" (игра переходит в состояние" a_1)

Ситуация после третьего хода:

Таблица 22

Номер хода	ход В	ход А	В какое состояние переходит игра
1	3	4	a_3
2	4	2	a_3
3	1	4	a_1

Четвертый ход игрока В: „беру 4 предмета". Ответный ход игрока А: „беру 2 предмета" (игра остается в состоянии a_1)

Ситуация после четвертого хода:

Таблица 23

Номер хода	ход В	ход А	В какое состояние переходит игра
1	3	4	a_3
2	4	2	a_3
3	1	4	a_1
4	4	2	a_1
	12	12	

Ясно, что оставщийся последний предмет достанется игроку В, ведь еще надо сделать один ход.

Победил в этом поединке игрок А — он действовал в соответствии с беспроигрышной стратегией, выраженой графом

Штейнгауз Гуго Дионисий
(1887—1972)

Польский математик, член Академии наук в Кракове и Польской АН (с 1952). Родился в Ясле. Учился в Львовском и Геттингенском университетах (1911). В 1917—1941 работал во Львовском университете (с 1920— профессор), в годы оккупации нелегально преподавал в Бардехове, в 1945—1961— профессор Вроцлавского университета, одновременно в 1948—1961 работал в Математическом институте Польской АН.

Основные исследования относятся к теории вероятностей, теории игр, вопросам применения математики к биологии, медицине. электротехнике, праву, статистике. Считал, что математический аппарат, служащий для какой-либо отрасли знания, должен быть простейшим. Занимался популяризацией науки.

Получая монеты, автомат запоминает, какую сумму он уже накопил. Каждой накопленной сумме соответствует конкретное «состояние» автомата в процессе его работы (в рассмотренном выше примере игра переходила из одного состояния в другое, здесь работающий автомат меняет свои состояния).

Исходное состояние (автомат еще не получил ни одной монеты) обозначим через a_0. Находясь в этом состоянии, автомат может получить 1, 2, 3 или 5 к. Если автомат получит 1, 2 или 3 к., то он перейдет соответственно в состояния a_1, a_2 и a_3. Из состояния

Куратовский Казимеж

(1896—1980)

Польский математик, член Польской АН (с 1954). Родился в Варшаве. В 1913—1920 учился в университетах Глазго и Варшавы. С 1921—профессор Варшавского университета, в 1927—1934— профессор Львовского политехникума, с 1948—директор Математического института в Варшаве. С 1957 — вице-президент Польской АН.

Основные работы относятся к топологии, теории графов, теории множеств и теории функций действительного переменного. Один из главных представителей польской топологической школы.

Развил аксиоматику общего топологического пространства, исследовал проблемы множественной топологии на плоскости. Начиная с середины 40-х гг. занимался поисками связей между топологией и теорией аналитических функций. Его работа «Топология» (1934) была издана в русском переводе (т. 1—2, 1966—1969).

Президент Польского математического общества (1946—1953).

Иностранный член АН СССР (с 1966).

---

a_1 он может перейти в состояния a_2 и a_3, получив соответственно 1 или 2 к. В состояние a_3 он может перейти и из состояния a_2 при получении 1 к.

Все переходы из одного состояния в другое хорошо изображаются на графе; рядом со стрелками выписаны стоимости монет, вызывающие тот или иной переход (рис. 53).

Находясь в любом из 4-х состояний: a_0, a_1, a_2 и a_3, автомат может продать билет, после продажи он возвращается в исходное состояние, не забыв дать сдачу, если таковая полагается.

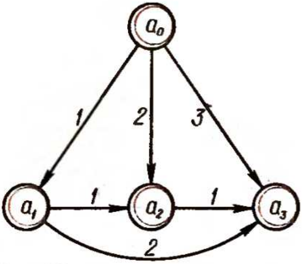


Рис. 53

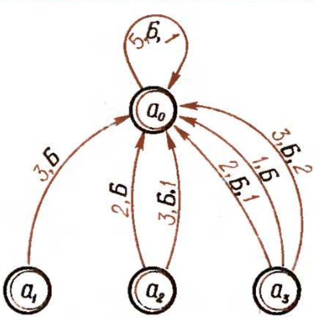


Рис. 54

Запись 3,Б,2 означает: —„Получил 3коп, дал билет и сдачи — 2коп."

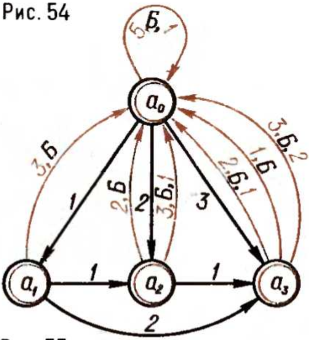


Рис. 55

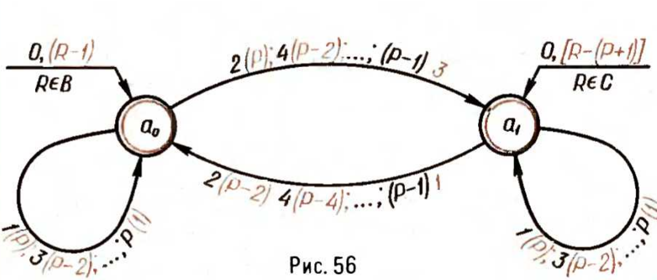


Рис. 56

Рассмотрим возможные случаи продажи билета:

1) в состоянии a_0 получено 5 к., отпускается билет и дается сдача в 1 к.;

2) в состоянии a_1 получено 3 к.— выдается билет;

3) в состоянии a_2 получено 2 к.— выдается билет; получено 3 к.— билет и 1 к. сдачи;

4) в состоянии a_3 получена 1 к.— выдается билет; получено 2 к. или 3 к.— выдается билет и сдача 1 или 2 к.

Все эти действия можно на графе изобразить так, как показано на рисунке 54. Рядом со стрелками выписаны действия автомата.

Объединяя оба рисунка, мы получаем граф, полностью описывающий всю деятельность автомата, как на этапе накапливания суммы, так и при продаже билетов (рис. 55).

Заметим, что таким графом автомат задается полностью, а поэтому при его конструировании следует обращаться только к графу: в нем зафиксированы все детали процесса. Кстати, такой автомат можно изготовить, располагая лишь логическими элементами «И», «ИЛИ» и «НЕ».

Рассказанное позволяет в форме такого графа задать алгоритм игры «Побеждает чет» при любых n и всевозможных нечетных P. Выше был рассмотрен всего лишь частный случай: $N=25$, $P=4$.

Алгоритм содержит две основные рекомендации:

1) способ ответа на вопрос: «Каким по очереди — первым или вторым вступать в игру?»;

2) как рассчитывать свой ход.

Первая рекомендация формулируется так: решение о первом ходе принимается после того, как будет найден остаток R от деления числа N на число $(2P+2)$.

Заметим, что при этом образуются остатки исключительно из нечетных чисел, которые разбиваются на три группы:

1	3, 5, 7, ..., P	$P+2$, ..., $2P+1$
группа A	группа B	группа C

Если остаток R входит в группу $A (R=1)$, то первый ход следует предоставить сопернику, считая, что игра находится в состоянии a_0;

если остаток R принадлежит группе B, то в игру следует вступить первым, брать $(R-1)$ предмет и считать, что игра после этого хода приведена в состояние a_0;

если остаток принадлежит группе C, то в игру следует вступать первым, брать $(R-(P+1))$ предмет и считать, что игра приведена в состояние a_1.

После того как решение о первом ходе принято, игра осуществляется в соответствии с граф-схемой, изображенной на рисунке 56.

Граф-схема имеет всего две вершины, а это означает, что игра может находиться только в двух состояниях. Рядом со стрелками указаны ходы соперника и ответные ходы — они указаны в скобках. У стрелок, входящих сверху в состояния a_0 и a_1, выписаны первые ходы, если в игру приходится вступать первым.

Рассмотренный пример подтверждает мысль о том, что графы могут содержать исключительно много информации. В лаконичной, удобной для применения форме выписаны рекомендации к игре при различных начальных состояниях.

3. ГРАФ — ИНСТРУМЕНТ ПРОГРАММИСТА

Перед тем как поручить решение какой-либо задачи ЭВМ, программист, продумывая весь процесс решения, часто пользуется специальными **символами** — так называемыми **блок-схемами программ.**

Блок-схема — это один из специальных графов, вершины которого есть узловые точки всего процесса решения.

Двигаясь по графу, переходя от вершины к вершине и выполняя указания, соответствующие каждой узловой точке, можно всегда решить задачу. Блок-схема исчерпывающим образом задает процесс решения задачи во всех его деталях.

Ниже приводится задача и составленная для ее решения блок-схема.

Среди первых 100 натуральных чисел отыскать все кратные 3 и кратные 5. Вычислить сумму чисел каждого вида (числа, которые одновременно делятся на 3 и на 5, не учитывать). Обе суммы — обозначим их через S_3 и S_5 — напечатать.

Блок-схема может иметь, например, такой вид, как показано на рисунке 57.

Всякая блок-схема программы состоит из элементов трех видов — они изображены на рисунке 58.

Вытянутые с закругленными краями прямоугольники являются начальной и конечной вершиной графа.

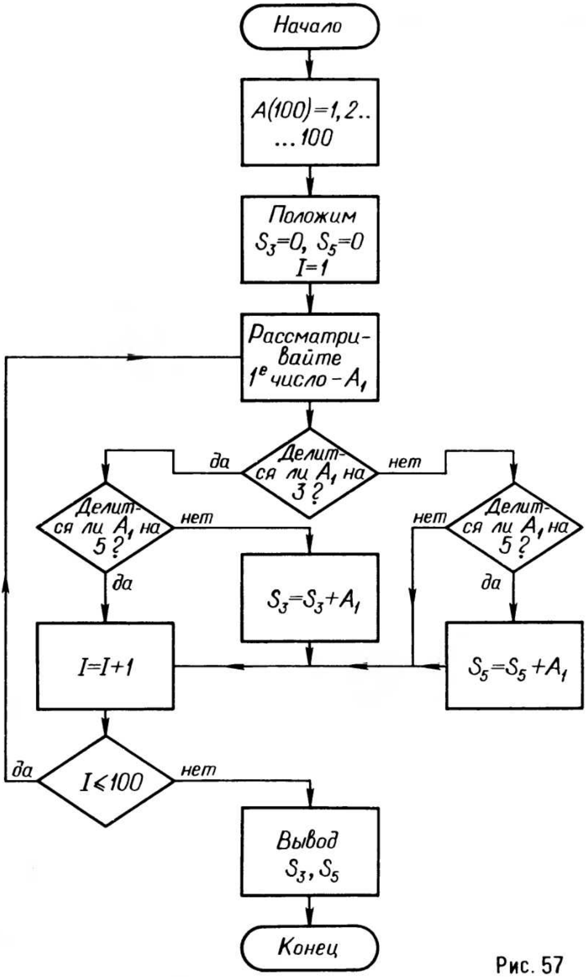

Начало
A(100)=1, 2..
...100
Положим
$S_3=0$, $S_5=0$
$I=1$
Рассматри-
вайте
$1^е$ число – A_I
Делит-
ся ли A_I на
3 ?
да
нет
Делит-
ся ли A_I на
5 ?
нет
да
Делит-
ся ли A_I на
5 ?
нет
да
$S_3=S_3+A_I$
$I=I+1$
$S_5=S_5+A_I$
да
$I\leqslant100$
нет
Вывод
S_3, S_5
Конец

Рис. 57

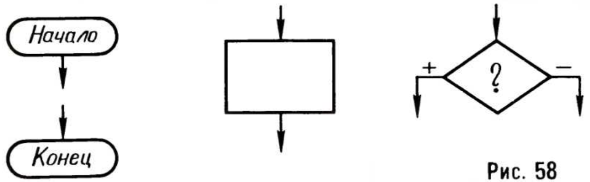


Рис. 58

В одной из них начинается процесс решения, в другой — заканчивается.

В прямоугольниках обычной формы выписываются операторы — действия, которые следует выполнять на данном шаге процесса решения задачи.

В ромбах указаны вопросы, на которые следует получить ответы, и на основании этих ответов продолжать решение — переходить к тому оператору, который указан одной из стрелок, ведущих из ромба.

В блок-схеме учтены все ситуации, которые могут возникнуть в процессе решения задачи, и указаны все действия, которые следует предпринять в любой момент решения задачи.

Предлагаем читателю совершить одно-два продвижения по схеме, чтобы увидеть особенности и привлекательные стороны этого способа логики решения задачи. При этом следует учесть, что:

первые 100 натуральных чисел даны как первые 100 членов последовательности A_n: $A_1=1$, $A_2=2$, ..., $A_{100}=100$;

записи $S_3=0$, $S_5=0$ и $1=1$ означают: переменные S_3 и S_5 получают (им присваивается) значение 0, а переменной I присваивается значение 1;

запись $S_3=S_3+A_I$ означает: значение переменной S_3 увеличивается на A_I и становится равным S_3+A_I; аналогично следует понимать и запись $S_5=S_5+A_I$;

Шеннон Клод Элвуд

(р. 1916)

Американский математик и инженер, член Национальной АН США (с 1956) и Американской академии искусств и наук. Родился в Гейлорде (штат Мичиган). Закончил Мичиганский университет (1936). В 1940—1941 учился в Принстонском университете. В 1936—1940 работал в Массачусетском технологическом институте, в 1941—1958 — в математической лаборатории телефонной компании «Белл», с 1958 — профессор Массачусетского технологического института.

Работы относятся к теории информации, одним из создателей которой он является. Предложил (1948) метод количественного выражения информации. Развил алгебру логики как основу метода создания вычислительных машин. Применил теорию вероятностей к учению о языке. Указал на соответствие между значениями «истина» и «ложь» символической логики и значениями «1» и «0» электронных сетей. Показал, как может быть построена «логическая машина».

запись $I=I+1$ означает: значение переменной I увеличилось на 1.

Продвижение по граф-схеме рекомендуем осуществить, начав с оператора (2) при $A_1=6$ ($I=6$) и при $A_1=15$ ($I=15$).

Этой же самой блок-схеме можно придать вид стандартно оформленного графа с цветными вершинами. Синим вершинам соответствуют ромбы в блок-схеме: знак «плюс» (+) написан у ребра, ведущего к оператору, который следует выполнять, если на вопрос, за-

Советский математик, академик (с 1958, член-корреспондент АН СССР с 1939). Родился в Москве. В 14-летнем возрасте потерял зрение в результате несчастного случая. Окончил Московский университет (1929). С 1930 работает в Московском университете (с 1935 — профессор), одновременно с 1939 — в Математическом институте АН СССР.

Основные работы относятся к теории дифференциальных уравнений, топологии, теории колебаний, теории управления, алгебре. Создал математическую теорию оптимальных процессов, в основе которой лежит принцип максимумов Понтрягина.

Почетный член Международной академии астронавтики (с 1966), вице-президент Международного математического союза (1970—1974), почетный член АН ВНР (с 1972).

Герой Социалистического Труда (1969).

Ленинская премия (1962), Государственная премия СССР (1941), Международная премия им. Н. И. Лобачевского (1966).

Понтрягин Лев Семенович

(р. 1908)

писанный в ромбе, дается положительный ответ; знак минус (—) — у ребра, ведущего к оператору, который выполняется, если на вопрос, заданный в ромбе, следует ответить отрицательно.

Наше небольшое вступительное знакомство с элементами теории графов можно сравнить с путешествием по незнакомой стране на автобусе. Проезжая, мы увидели немало нового. Сменяя друг друга, мимо нас промелькнули необычные задачи, новые методы, удивительные по своим формам графы. Лишь иногда мы делали остановку и с некоторыми задачами и способами их решения знакомились детально. Например, мы до конца разобрались в том, на каких графах можно продолжить эйлеровы пути, и научились такие пути находить. Подробно был рассмотрен метод ветвей и границ — мы знаем как решается задача о посыльном, и сумеем справиться не только с этой задачей, но и с задачами, которые можно свести к ней.

Другие не менее интересные задачи столь подробно не обсуждались — их назначением было привлечь внимание к удивительному миру страны графов. Эти задачи должны вызвать желание поближе узнать страну, по которой совершается первое краткое ознакомительное путешествие.

4. О ГРАФАХ ЯЗЫКОМ МАТЕМАТИКИ

Наши представления о графах и их свойствах получены при знакомстве с занимательными задачами, для решения которых привлекались лишь некоторые сведения из соответствующей теории. Однако теория графов — дисциплина математическая и создана усилиями математиков, поэтому ее изложение включает и необходимые строгие определения, а все утверждения о графах — теоремы должны быть доказаны.

Приступим к организованному введению основных понятий.

Вершины и ребра

Начнем с точного определения предмета нашего рассказа — определим понятие граф.

Определение 1. **Графом** называется непустое множество точек — **вершин** и отрезков — **ребер**, оба конца которых принадлежат заданному множеству точек.

В дальнейшем вершины графа будем обозначать большими буквами с индексами A_1, A_2, A_3, ..., A_n.

Иногда граф в целом будем обозначать одной большой латинской буквой.

Определение 1.1. Вершины, которые не принадлежат ни одному ребру называются **изолированными**.

О п р е д е л е н и е 1.2. Граф, состоящий из одних изолированных вершин, называется **н у л ь - г р а ф о м**. Обозначение: O_n — граф с вершинами, не имеющий ребер.

О п р е д е л е н и е 1.3. Граф, в котором каждая пара вершин соединена ребром, называется **п о л н ы м**. Обозначение: U_n — граф состоящий из n вершин и ребер, соединяющих всевозможные пары этих вершин.

Такой граф U_n можно представить как n-угольник, в котором проведены все диагонали. Примеры приведены на рисунках 59, а, б, в.

О п р е д е л е н и е 1.4. **С т е п е н ь ю в е р ш и н ы** называется число ребер, которым принадлежит вершина. Обозначение: $\rho(A)$ — степень вершины A.

На рисунке 59: $\rho(A)=1$, $\rho(C)=2$, $\rho(E)=3$.

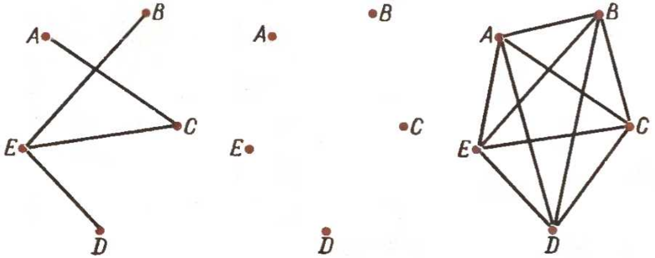
Т е о р е м а 1.1. **Сумма степеней вершин любого графа равна удвоенному числу его ребер.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A_1, A_2, A_3, ..., A_n — вершины данного графа, а $\rho(A_1)$, $\rho(A_2)$, ..., $\rho(A_n)$ — степени этих вершин. Подсчитаем число ребер, сходящихся в каждой вершине, и просуммируем эти числа. Это равносильно нахождению суммы степеней всех вершин. При таком подсчете каждое ребро будет учтено дважды (оно ведь всегда соединяет две вершины).

Отсюда следует: $\sum\limits_{i=1}^{n}\rho\ (A_i)=\frac{1}{2}N$, где N — число ребер.

Т е о р е м а 1.2. **Число нечетных вершин любого графа четно.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть a_1, a_2, a_3, ..., a_k — степени четных вершин графа, а b_1, b_2, b_3, ..., b_m — степени нечетных вершин графа. Сумма $a_1+a_2+...+a_k+b_1+$ $+b_2+...+b_m$ ровно вдвое превышает число ребер графа. Сумма $a_1+a_2+...+a_k$ четная (сумма четных чисел), тогда сумма $b_1+b_2+b_3+...+b_m$ должна быть четной.



граф *нуль-граф* *полный граф*

а б в

Рис. 59

Рис. 60 I

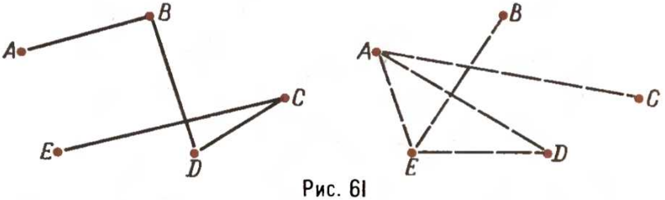


Рис. 61

Это возможно лишь в том случае, если m — четное, то есть четным является и число нечетных вершин графа.

Эта теорема имеет немало любопытных иллюстраций:

нечетное число знакомых в любой компании всегда четно;

число вершин многогранника, в которых сходится нечетное число ребер, четно;

число всех людей, когда-либо пожавших руку другим людям, нечетное число раз, является четным.

Определение 1.5. Граф, степени всех k вершин которого одинаковы, называется однородным степени k.

На рисунке 60 изображены однородные графы 3-й и 4-й степени. Число ребер однородного графа степени k равно $P=\frac{1}{2}nk$, где n — число вершин графа. Если дан полный граф U_n, то его степень $k=n-1$, а число ребер $P=\frac{1}{2}n(n-1)$.

Теорема 1.3. **Во всяком графе с n вершинами, где $n \geqslant 2$, всегда найдутся две или более вершины с одинаковыми степенями.**

Доказательство. Если граф имеет n вершин, то каждая из них может иметь степень 0, 1, 2, ..., $(n-1)$. Предположим, что в некотором графе все его вершины имеют различную степень, то есть $\rho(A)=0$, $\rho(B)=1$, $\rho(C)=2$, ..., $\rho(X)=n-1$, и покажем, что этого быть не может. Действительно, если $\rho(A)=0$, то это значит, что A — изолированная вершина, и поэтому в графе не найдется вершины X со степенью $\rho(X)=n-1$. В самом деле, эта вершина должна быть соединена с $(n-1)$ вершиной, в том числе и с A, но ведь A оказалась изолированной.

Следовательно, в графе, имеющем n вершин, не могут быть одновременно вершины степени 0 и $(n-1)$. Это значит, что из n вершин найдутся две, имеющие одинаковые степени.

Содержание теоремы хорошо иллюстрирует задача, утверждение которой равносильно этой теореме.

В футбольном турнире участвует 20 команд. Доказать, что в любой момент времени имеется две команды, сыгравшие одинаковое число матчей.

Для дальнейшего нам потребуется понятие о дополнении графа.

Определение 1.6. Дополнением данного графа называется граф, который состоит из всех ребер (и их концов), которые необходимо добавить к исходному графу, чтобы получить полный граф. Если данный граф обозначается буквой G, то дополнение обозначается $\bar{G}$.

На рисунке 61 приведен пример графа G и его дополнения $\bar{G}$.

Теорема 1.4. **Если в графе с n вершинами ($n \geqslant 2$) только одна пара имеет одинаковую степень, то в этом графе всегда найдется либо единственная изолированная вершина, либо единственная вершина, соединенная со всеми другими.**

Содержание этой теоремы хорошо разъясняется задачей:

Группа, состоящая из n школьников, обменивается фотографиями. В некоторый момент времени выясняется, что двое совершили одинаковое число обменов. Доказать, что среди школьников есть либо один еще не начинавший обмена, либо один уже завершивший его.

Доказательство предлагаем найти читателю самостоятельно.

Маршруты на графе. Идеи и проблемы

Рассматривая занимательные задачи об отыскании эйлеровых и гамильтоновых путей на графе, мы неоднократно подчеркивали их большую практическую важность.

Основана она на следующих определениях и теоремах.

Определение 2. Путем от A_1 *до* A_n называется последовательность ребер, ведущая от A_1 к A_n, такая, что каждые два соседних ребра имеют общую вершину и никакое ребро не встречается более одного раза (A_1 — начало пути, A_n — конец пути).

Например, на рисунке 62 дан граф G, на котором проложено два пути:

1) от A_1 к A_6; его записывают в виде последовательности ребер:

$$(A_1, A_2); (A_2, A_3); (A_3, A_4); (A_4, A_5); (A_5, A_6);$$

2) путь, соединяющий вершины A_2 и A_4:

$$(A_2, A_5); (A_5, A_1); (A_1, A_6).$$

На этом же графе проложен маршрут, который нельзя считать путем:

$$(A_1, A_2); (A_2, A_3); (A_3, A_4); (A_4, A_5); (A_5, A_2); (A_2, A_3); (A_3, A_4).$$

Определение 2.1. Циклом называется путь, в котором совпадают начальная и конечная вершины.

Пример цикла, проложенного на графе G:

$$(A_2, A_3); (A_3, A_4); (A_4, A_6); (A_6, A_5); (A_5, A_4); (A_4, A_2).$$

Определение 2.2. Простым циклом называется цикл, не проходящий ни через одну из вершин графа более одного раза.

Пример простого цикла, проложенного на графе G:

$$(A_4, A_6); (A_6, A_5); (A_5, A_4).$$

Определение 2.3. Длиной пути цикла называется число ребер этого пути.

Если вы внимательно прочли определения и вдумались в их смысл, то сможете ответить на вопросы:

Сколько ребер имеет простой цикл, у которого n вершин?

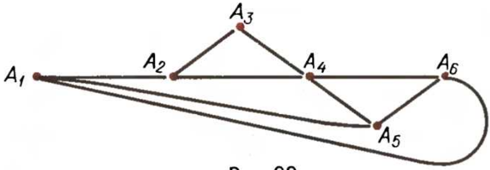


Рис. 62

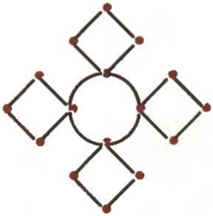


Рис. 63

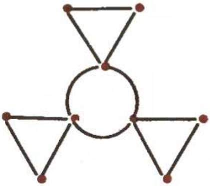


Рис. 64

Рис. 65

Сколько вершин имеет простой цикл длины k?

Т е о р е м а 2. 1. **Если у графа все простые циклы четной длины, то он не содержит ни одного цикла нечетной длины.**

Рисунок 63 поясняет условие теоремы. На изображенном графе все 5 простых циклов четные.

Суть теоремы в том, что на этом графе невозможно найти цикл (как простой, так и непростой) нечетной длины, то есть содержащий нечетное число ребер.

Доказательство теоремы выходит за пределы нашей книги.

На рисунке 64 изображен граф, все простые циклы которого нечетны. Утверждается, что на этом графе невозможно проложить цикл четной длины. Так ли это?

О п р е д е л е н и е 2.4. Две вершины A_k и A_n в графе называются связными (несвязными), если в нем существует (не существует) путь из A_k в A_n.

О п р е д е л е н и е 2.5. Граф называется связным, если каждые две его вершины связны. Если же в графе найдется хотя бы одна пара несвязных вершин, то граф называется несвязным.

Пример связного и несвязного графа показан на рисунке 65.

Введенные определения позволяют сформулировать одну из важнейших проблем в теории графов:

На каких графах можно найти цикл, содержащий все ребра графа по одному разу?

Эта проблема упоминалась при рассмотрении задачи об эйлеровых линиях. Обсудим эту проблему более подробно. Начнем с выяснения необходимых условий существования эйлерова цикла.

Предположим, что на графе G удалось проложить эйлеров цикл. Это значит:

1) удалось соединить все вершины графа, то есть рассматриваемый граф является связным;

2) эйлерова линия при ее проведении входит в каждую вершину и выходит из нее одно и то же число раз, то есть степени всех его вершин четны.

Л. Эйлер доказал, что эти условия являются и достаточными. Иначе говоря, имеет место теорема:

Т е о р е м а 2. 2. **Для того, чтобы граф был эйлеровым, необходимо и достаточно, чтобы он был связным и все его вершины имели четную степень.**

Доказательство достаточности условий осуществим конструктивно — покажем, что данных условий достаточно для построения эйлерова цикла. Делаем это так: на связном графе, степени вершин которого четны, начинаем с прокладки эйлеровой линии. Пусть для определенности прокладка цикла начата в вершине A_1, от начальной вершины переходим к следующей, затем двигаемся от вершины к вершине, всякий раз выбирая такое ребро, по которому еще не двигались. Так как число ребер в графе конечно, то прокладка через какое-то количество шагов будет завершена, а поскольку каждой вершине подходит столько же ребер, сколько и выходит, то прокладка завершится в начальной вершине.

Может, однако, оказаться, что построенный цикл не является эйлеровым, некоторые вершины исходного графа не были пройдены, а это значит, что не были пройдены и некоторые ребра.

Если это так, то на графе найдется вершина A_k, из которой выходит ребро, не использованное при прокладке. Ясно, что кроме этого выходящего из A_k ребра, должно быть ребро в эту вершину входящее ($\rho(A_k)$ — число четное).

Совершим дополнительную прокладку, начав ее из вершины A_k, причем в новый цикл включим только те ребра исходного графа, которые не были пройдены при первой прокладке. Этот новый цикл должен завершаться в вершине A_k.

Теперь из этих двух циклов, полученных при первой и второй прокладке, нетрудно получить единый цикл, включающий в себя ребра этих двух.

Поступаем так: прокладку начинаем в вершине A_1 и ведем до вершины A_k. Достигнув вершины A_k, начинаем прокладку цикла, который завершится вновь в вершине A_k. После этого продолжаем прокладку первого цикла.

На рисунке 66 показаны два этапа построения требуемого эйлерова цикла. На первом этапе в вершине

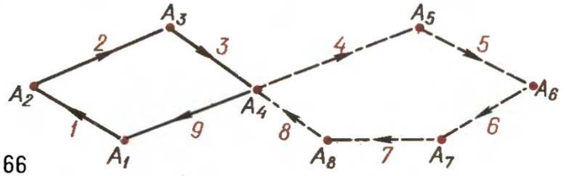


Рис. 66

A_4 не был пройден дополнительный цикл (он выделен пунктиром).

Стрелками указано направление обхода ребер графа, цифра указывает, каким по очереди проходится это ребро.

Если есть еще не подключенные ребра, то их обнаруживаем и подключаем таким же образом.

Все эти действия и доказывают возможность всегда построить эйлеров цикл на связном графе, все вершины которого четны.

Не менее важным являются для практики следующие две теоремы:

Теорема 2.3. **Для того чтобы на связном графе можно было бы проложить цепь AB, содержащую все его ребра в точности по одному разу, необходимо и достаточно, чтобы A и B были единственными нечетными вершинами этого графа.**

Доказательство этой теоремы очень интересно и характерно для теории графов. Его также следует считать конструктивным (обратите внимание на то, как использована при этом теорема 2.2.).

Для доказательства к исходному графу присоединяем ребро (A, B); после этого все вершины графа станут четными. Этот новый граф удовлетворяет всем условиям теоремы 2.2, и поэтому в нем можно проложить эйлеров цикл Q. Если теперь в этом цикле удалить ребро (A, B), то останется искомая цепь AB.

На этом любопытном приеме основано доказательство следующей теоремы, которую следует считать обобщением теоремы 2.3.

Теорема 2.4. **Если данный граф является связным и имеет $2k$ вершин нечетной степени, то в нем можно провести k различных цепей, содержащих все его ребра в совокупности ровно по одному разу.**

Доказательство этой теоремы предлагаем осуществить читателям.

В заключение остановимся на известной головоломке и попытаемся применить рассмотренные теоремы для решения поставленной в ней проблемы.

Представьте себе, что по шахматной доске с клетки на клетку всевозможными способами передвигается конь. Каждое его перемещение будем считать дугой графа, а каждую клетку — вершиной графа. Спрашивается, можно ли проложить на таком запутанном графе эйлеров цикл?

Ясно, что действовать подбором не следует. Рассмотренная теория позволит ответить на этот вопрос быстрее и точнее. Действительно, в соответствии с теоремой о необходимых и достаточных условиях существования эйлерова цикла требуется выяснить степень каждой его вершины, причем, если найдется хотя бы одна пара вершин нечетной степени, то эйлеров цикл проложить нельзя.

Поступим так: рассмотрим верхний левый угол шахматной доски и вычислим степень нескольких вершин: $a8$, $b8$, $c8$, $a7$, $b7$, $c7$ (рис. 67); обозначения вершин сделаны так, как это принято в шахматах.

Вершина $a8$ имеет степень, равную 2, а две вершины $a7$ и $b8$ нечетны, степень каждой из них равна 3. Этого уже достаточно, чтобы сделать вывод: **на шахматной доске нельзя построить эйлеров цикл, включающий все возможные перемещения коня по одному разу.**

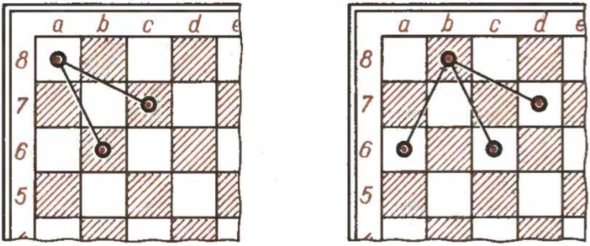


Рис. 67

	a	b	c	d	e	f	g	h	
8	50	35	26	11	24	37	14	63	8
7	27	10	51	36	13	62	39	22	7
6	34	49	12	25	38	23	64	15	6
5	9	28	33	52	61	16	21	40	5
4	48	53	8	29	20	41	60	1	4
3	7	32	55	46	57	4	17	42	3
2	54	47	30	5	44	19	2	59	2
1	31	6	45	56	3	58	43	18	1
	a	b	c	d	e	f	g	h	

Рис. 68

Любопытно, что гамильтонов цикл на шахматной доске проложить можно. Один из вариантов решения приведен на рисунке 68 (цифрой 1 отмечена клетка доски, с которой начинается цикл, а числом 64 предпоследняя клетка, ходом с нее на клетку 1 искомый цикл завершается).

Шахматную доску можно представить в виде графа при несколько ином определении дуги в этом графе. В рассмотренном выше примере дуга определялась «ходом коня», но можно, например, поручить некоторой несуществующей фигуре ходить только по диагонали на три клетки. Применительно к такому способу образования поставим следующие вопросы:

Можно ли этой фигурой обойти все клетки шахматной доски? (Иначе говоря, является ли шахматная доска связным графом?)

Можно ли построить гамильтонов цикл?

Можно ли проложить эйлеров цикл?

Деревья и леса

Определение 3. Деревом называется связный граф, не содержащий циклов.

Трехмерной моделью графа-дерева служит например, настоящее дерево с его замысловато разветвленной кроной.

Река и ее притоки образуют уже «плоское» гигантское «дерево» на поверхности земли (рис. 69).

Из отдельных граф-деревьев можно образовать лес.

Определение 3.1. Несвязный граф, состоящий исключительно из деревьев, называется лесом.

Ниже изображены два леса: в первом из них три дерева, каждое содержит 5 вершин (рис. 70); во втором — 6 деревьев, каждое содержит по 6 вершин (рис. 71). Интересно, что все деревья каждого из этих лесов различны.

Если вы попробуете как-то иначе соединить 6 вершин, то убедитесь, что получите одно из уже изображенных деревьев.

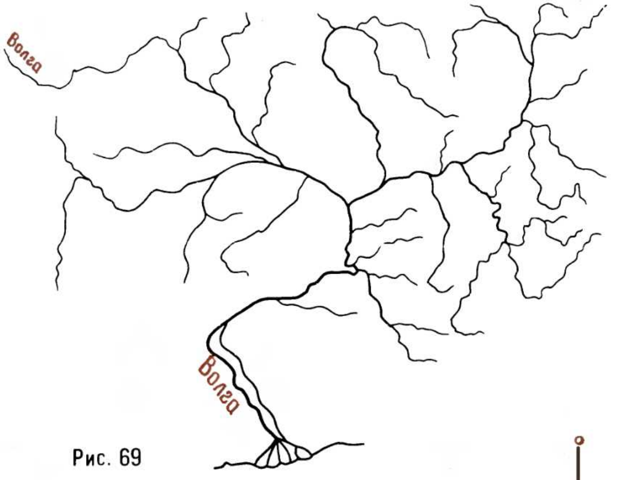


Рис. 69

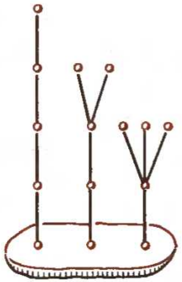


Рис. 70

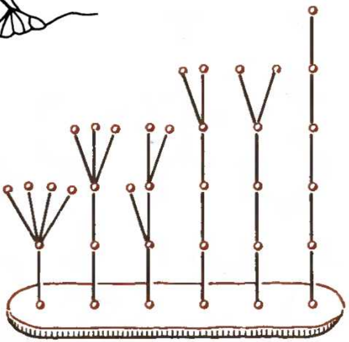


Рис. 71

Ясно, что для любых двух вершин дерева можно указать соединяющий их путь, состоящий исключительно из ребер дерева.

Интересной задачей является задача о деревьях с перенумерованными вершинами.

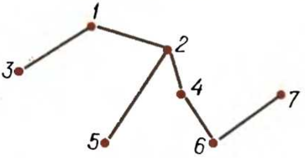


Рис. 72

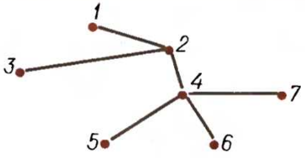


Рис. 73

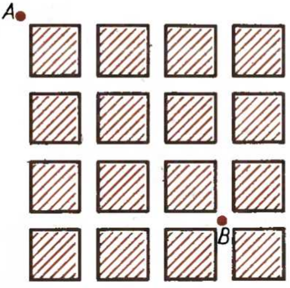


Рис. 74

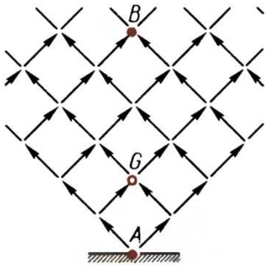


Рис. 75

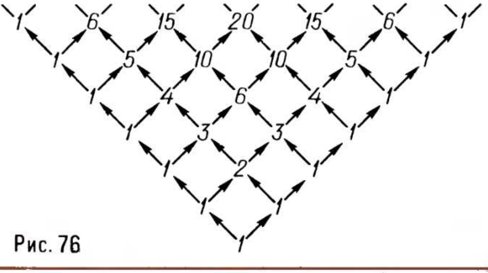


Рис. 76

Дерево, все n вершин которого имеют номера от 1 до n, называют *деревом с перенумерованными вершинами*.

На рисунке 72 изображено дерево, содержащее 7 вершин, причем каждая из них имеет номер. Рядом на рисунке 73 изображено другое дерево, содержащее те же вершины. Эти деревья различны. Можно получить и другие деревья, содержащие эти же вершины. Сколько?

Ответ известен. Его получил английский математик А. Кэли (1821—1895). Его вывод гласит: **различных деревьев с n перенумерованными вершинами можно построить n^{n-2}.**

Деревьев с 7 перенумерованными вершинами всего существует $7^5=16107$ — неожиданно большое число.

Графы-деревья издавна привлекали математиков. Сегодня двоичные деревья используются не только математиками, а и биологами, химиками, физиками и инженерами.

Остановимся на одном несложном применении двоичного дерева. Пусть необходимо проложить маршрут из A в B, двигаясь по улицам города. Схема улиц изображена на рисунке 74.

Сколько различных маршрутов ведет из A в B?

Решение начнем с того, что изобразим соответствующее рисунку 75 двоичное дерево.

Движение по улицам соответствует движению по ребрам изображенного двоичного дерева, а на каждом перекрестке можно менять направление либо вправо, либо влево.

Нетрудно сообразить, что на перекресток, отмеченный буквой C, можно попасть двумя путями. Ясно, что движение из C к следующему перекрестку по одной из двух возможных улиц возможно одним путем, но есть еще один путь по крайней улице и, следовательно, всего путей 3.

Далее видим, что число путей, ведущих к каждому перекрестку (число это записывается у перекрестка), равно либо ближайшему числу, либо сумме двух ближайших таких чисел.

Числа, указывающие количество путей, ведущих к каждому перекрестку, можно расположить в виде треугольника так, как показано на рисунке 76.

Этот треугольник называется треугольником Паскаля. Числа, его образующие, играют большую роль во многих разделах математики.

В заключение сообщим, что для продвижения из одного углового поля шахматной доски в диагонально противоположный угол существует 3432 различных пути. В том, что это так можно убедиться, построив соответствующий треугольник Паскаля.

Завершая знакомство с графами типа дерево рассмотрим, как с помощью дерева можно изображать булевы формулы.

Для этого будут использованы деревья самых простых структур.

Начнем с того, что научимся изображать конъюнкцию двух переменных A и B. Это делается так, как показано на рисунке 77.

Рядом представлено дерево, изображающее логическое произведение $AB\bar{C}$.

Следующая операция, которую можно изобразить в виде дерева, это логическое «ИЛИ» (в исключающем смысле: «или А или В» что-то одно). Дерево имеет вид, показанный на рисунке 78.

Формулам $A(B+C)$ и $(A+B)(B+\bar{C})$ соответствуют графы, изображенные на рисунке 79.

Любопытно, как просто осуществляется операция отрицания:

1) операция отрицания одного переменного сводится к раскрашиванию данного ребра;

2) операция отрицания логического произведения AB (конъюнкции) сводится к замене цепи из двух последовательно расположенных ребер A и B на два ребра, выходящих из одной общей вершины и при этом уже окрашенных (рис. 80);

3) операция отрицания логической суммы (дизъюнк-

Рис. 77

Рис. 78

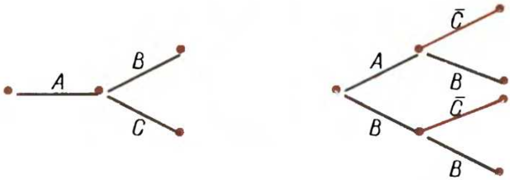


Рис. 79

Рис. 80

Рис. 81

ции) сводится к замене одного заветвления на цепь из двух ребер (уже раскрашенных; рис. 81).

Не менее интересно и столь же просто графически изображается правило поглощения. Рисунок 82 иллюстрирует правило: ребро, выходящее из вершины, *Исходная формула и граф*

Окончательная формула и граф

$$A+AB+AB\bar{C} \equiv A$$

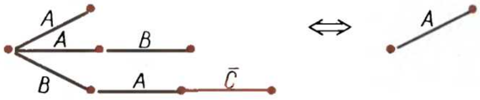


Рис. 82

Исходная формула и граф

Окончательная формула и граф

$$A(\bar{B}+C)+A\bar{C}(\bar{B}+C) \equiv A(\bar{B}+C)$$

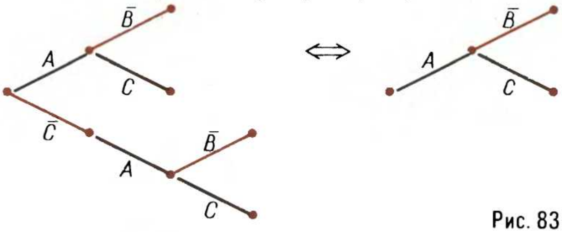
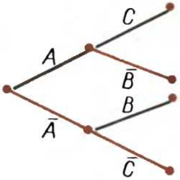


Рис. 83



Формула, задающая данный граф:

$$\bar{A}(B+\bar{C})+A(\bar{B}+C)$$

Рис. 84

поглощает все те ребра, выходящие из этой же вершины, в которые оно входит как часть.

Еще один пример представлен на рисунке 83 (исходная формула и граф изображены слева, результат поглощения — справа).

Столь же просто решается и обратная задача — задача выписывания формулы, соответствующей данному дереву. Формула, задающая граф, изображенный на рисунке 84 имеет вид: $A(B+\bar{C})+\bar{A}(\bar{B}+C)$.

Все сказанное позволяет сделать вывод о большой внутренней связи между методами, которые применяются в булевой алгебре, и возможностями теории графов. Так, некоторые задачи можно решать, используя булеву алгебру, а можно и с помощью графов, в частности, графов-деревьев.

Рассмотрим пример. Задачу, которая приведена ниже, решим сначала методами алгебры высказываний, а затем — с помощью двоичного дерева.

В школе проводятся соревнования по плаванию. Болельщики высказывают следующие предположения о будущих победителях:

Ваня: Наташа будет первой, а Вера — второй.

Сережа: Первой будет Света, а Люда займет третье место.

Дима: Света будет второй, Вера может рассчитывать лишь на третье место.

По окончании соревнований выяснилось, что каждый из них в одном из двух своих предположений оказался прав.

Кто из участниц занял первое, второе и третье место, если известно, что каждое место заняла одна из них и все они были призерами?

Решение методом алгебры высказываний начинаем с того, что вводим переменные, обозначающие каждое из высказанных предложений:

$Н_1$ — «Наташа будет первой»;
$В_2$ — «Вера займет второе место»;
$С_1$ — «Света будет первой»;
$Л_3$ — «Люда займет третье место»;
$С_2$ — «Света будет второй»;
$В_3$ — «Вера займет третье место».

Каждая из этих переменных может принимать два значения — «истина» (1) и «ложь» (0). Это булевы переменные.

Выпишем формулы, которые выражают каждое предположение в целом:

предположение Вани можно задать формулой

$$Н_1\bar{В}_2 + \bar{Н}_1 В_2 = 1,$$

которую следует прочесть как фразу: «Произойдет одно из двух: первой будет Наташа, а Вера не займет второе место или Вера займет второе место, тогда Наташа не будет первой». Как позднее выяснилось, такое предположение оказалось истинным.

Аналогично выписываются предположения Сережи и Димы:

$$С_1\bar{Л}_3 + \bar{С}_1 Л_3 = 1,$$
$$С_2\bar{В}_3 + \bar{С}_2 В_3 = 1.$$

Все три формулы рассматриваем совместно, считая каждую логическим уравнением, выражающим одно из истинных условий распределения мест среди победителей. Полученную систему уравнений решаем:

$$Н_1\bar{В}_2 + \bar{Н}_1 В_2 = 1,$$
$$С_1\bar{Л}_3 + \bar{С}_1 Л_3 = 1,$$
$$С_2\bar{В}_3 + \bar{С}_2 В_3 = 1.$$

Решение систем состоит в том, что первое из уравнений логически умножаем на второе — этим мы сводим в единое предположение два, затем полученное предположение логически умножаем на третье и получаем общее заключение о распределении мест:

$$(Н_1\bar{В}_2 + \bar{Н}_1 В_2)\,(С_1\bar{Л}_3 + \bar{С}_1 Л_3) = 1,$$
$$Н_1\bar{В}_2 С_1\bar{Л}_3 + Н_1\bar{В}_2\bar{С}_1 Л_3 + \bar{Н}_1 В_2 С_1\bar{Л}_3 + \bar{Н}_1 В_2\bar{С}_1 Л_3 = 1.$$

Каждое слагаемое есть логическое произведение отдельных высказываний о возможных местах, занимаемых спортсменками. Так, формулу $Н_1\bar{В}_2С_1\bar{Л}_3$ следует прочесть так: «Наташа будет первой, Вера не будет второй, Света займет первое место и Люда не будет третьей». Ясно, что такое предположение из дальнейшего рассмотрения следует исключить — оно не соответствует условиям распределения мест — две спортсменки не могут занять первое место.

Поэтому общее предположение Вани и Сережи будет иметь вид:

$$Н_1\bar{В}_2\bar{С}_1Л_3+\bar{Н}_1В_2С_1\bar{Л}_3+\bar{Н}_1В_2\bar{С}_1Л_3=1.$$

После перемножения полученной формулы на третью, получим:

$$\begin{gathered}(С_2\bar{В}_3+\bar{С}_2В_3)\,(Н_1\bar{В}_2\bar{С}_1Л_3+\bar{Н}_1В_2С_1\bar{Л}_3+\bar{Н}_1В_2\bar{С}_1Л_3)= \\ =С_2\bar{В}_3Н_1\bar{В}_2\bar{С}_1Л_3+\underline{С_2\bar{В}_3\bar{Н}_1В_2С_1\bar{Л}_3}+\underline{С_2\bar{В}_3\bar{Н}_1В_2\bar{С}_1Л_3}+ \\ +\underline{\bar{С}_2В_3Н_1\bar{В}_2\bar{С}_1Л_3}+\underline{\bar{С}_2В_3\bar{Н}_1В_2\bar{С}_1Л_3}+\underline{\bar{С}_2В_3\bar{Н}_1В_2С_1\bar{Л}_3}=1.\end{gathered}$$

Подчеркнуты все произведения, которые не соответствуют условию задачи.

Итак, имеем $С_2\bar{В}_3Н_1\bar{В}_2\bar{С}_1Л_3=1$, что расшифровывается в виде фразы: «Первой будет Наташа, второй — Света и третье место займет Люда».

Эту же задачу можно решить с помощью вычерчивания графа — дерева.

Начинаем с того, что вычерчиваем граф, который выражает связь двух переменных $Н_1$ и $В_2$. Верно одно из двух — либо $Н_1=1$, либо $В_2=1$ (рис. 85).

Затем присоединяем предположение: «Света займет первое место, либо Люда — третье» (рис. 86).

И, наконец, к полученным ветвям присоединяем граф, соответствующий предположению Димы, и получаем дерево, представленное на рисунке 87.

Только одна ветвь (она выделена) соответствует всем условиям задачи. Продвигаясь по этой ветви, мы образуем логическое произведение переменных $Н_1$, $Л_3$ и

Рис. 85

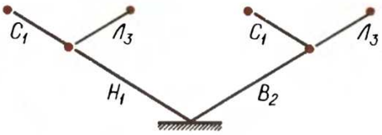


Рис. 86

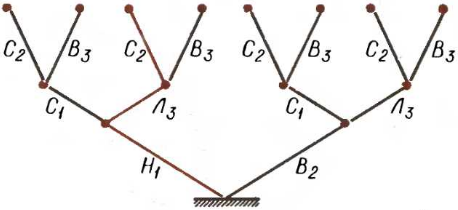


Рис. 87

$С_2$, что и указывает, какое место заняла каждая из спортсменок.

В рассмотренной задаче предпочтение следует отдать графическому методу, благодаря которому наглядно и просто получаем решение задачи.

Не следует, однако, думать, что графический способ всегда проще аналитического. Анализ уже начерченного дерева не всегда так легко осуществить, а главное не всегда легко и просто начертить дерево, соответствующее всем логическим связям в условии задачи.

В заключение заметим, что обнаруженная связь между булевыми операциями и действиями над графами является практически очень важной. Так, например, программисты при обсуждении идей алгоритмов и программ очень часто «говорят» между собой на языке графов, рисуя будущий алгоритм. В ходе таких «разговоров» непременно упоминаются и операции дизъюнкции, конъюнкции, отрицания. Программист в равной степени владеет и языком графов, и языком булевых алгебр. Итак, сегодня эти две самостоятельно возникшие ветви математики сблизились на почве управления работой ЭВМ.

Плоские графы

Рассказ о задаче, в которой требовалось выяснить, можно ли вычертить печатную схему для данного набора вершин, был нами не закончен. Задача была только поставлена.

Рассмотрим несколько теоретических положений, необходимых для полного ее решения.

Определение 4. Плоским называется граф G, который можно нарисовать на плоскости так, что

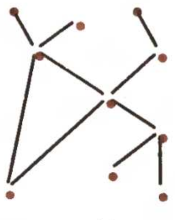


Рис. 88

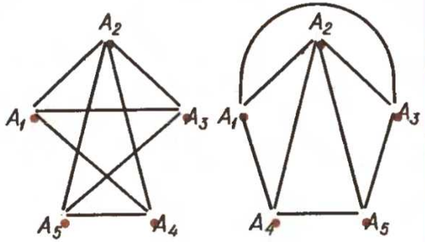


Рис. 89

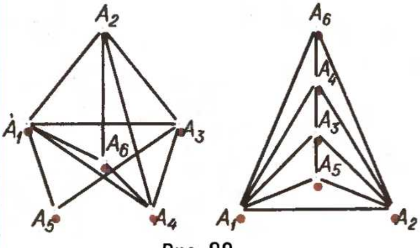


Рис. 90

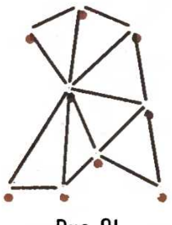


Рис. 91

никакие два его ребра не имеют других общих точек, кроме их общей вершины.

Например,

всякое дерево есть плоский граф;

граф, содержащий цикл, из вершин которого выходят деревья (рис. 88), является плоским.

На рисунке 89 изображен один и тот же плоский граф. (Рисунок справа показывает: слева изображен действительно плоский граф, поскольку его удалось нарисовать на плоскости так, что ни одна пара ребер не пересекается).

Еще один аналогичный пример показан на рисунке 90. (Рисунки справа называются плоскими изображениями плоского графа).

Определение 4.1. Гранью в плоском изображении графа называется часть плоскости, ограниченная простым циклом и не содержащая внутри других циклов.

Например, на рисунке 91 изображен граф с семью гранями; на рисунке 92 представлены графы, у первого из которых заштрихованная область не является гранью, а незаштрихованная является; на втором рисунке 92 изображена грань (внутри дерево).

Иногда полезно рассматривать и бесконечные грани — то есть часть плоскости, расположенную вне плоского изображения графа. Пример показан на рисунке 93 (заштрихована бесконечная грань, которая уже не может содержать других циклов).

Остановимся на двух графах, которые в ряде вопросов играют особенно важную роль. Речь идет о полном графе с пятью вершинами и о графе, который требовалось начертить в задаче о печатной схеме (три точки A, B и C соединились с тремя другими на этой же схеме). Рисунок 94 напоминает этот граф. При разборе задачи было показано, что этот граф не является плоским.

Рис. 92

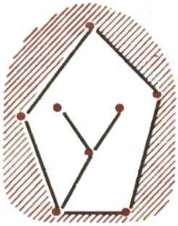
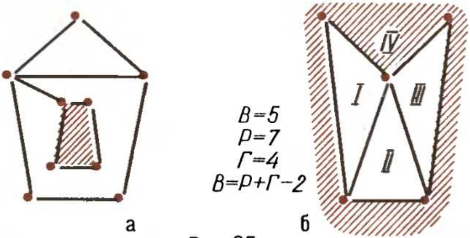


Рис. 93

Рис. 94



а б

Рис. 95

Т е о р е м а 4.1. **Полный граф с пятью вершинами не является плоским.**

Для доказательства воспользуемся формулой Эйлера:

$$B - P + \Gamma = 2,$$

где В — число вершин плоского графа, Р — число ребер его Г — число граней.

Формула Эйлера справедлива для плоских связных графов, в которых ни один из многоугольников не лежит внутри другого.

На рисунке 95 слева изображен граф, к которому формула не применима — заштрихованный многоугольник находится внутри другого. Справа приведено изображение графа, к которому формула применима.

Эту формулу можно доказать методом математической индукции. Это доказательство мы опускаем. Заметим только, что формула справедлива и для пространственных многогранников.

Пусть все пять вершин графа соединены друг с другом (рис. 95). Замечаем, что на графе нет ни одной грани, ограниченной только двумя ребрами. Если через φ_2 обозначить число таких граней, то $\varphi_2=0$.

Далее рассуждаем от противного, а именно: предположим, что исследуемый граф плоский. Это значит, что для него верна формула Эйлера. Число вершин в данном графе $B=5$, число ребер $P=10$, тогда число граней $\Gamma=2-\text{B}+\text{P}=2-5+10=7$.

Это число можно представить в виде суммы: $\Gamma=\varphi_3+$ $+\varphi_4+\varphi_5+\ldots$, где φ_3 — число граней, ограниченных тремя ребрами, φ_4 — число граней, ограниченных четырьмя ребрами и т. д.

С другой стороны каждое ребро является границей в точности двух граней, а поэтому число граней равно $2P$, в то же время $2P=20=3\varphi_3+4\varphi_4+\ldots$. Умножив равенство $\Gamma=7=\varphi_3+\varphi_4+\varphi_5+\ldots$ на три, получим $3\Gamma=$ $=21=3\varphi_3+3\varphi_4+3\varphi_5+\ldots$.

Ясно, что $(3\varphi_3+3\varphi_4+3\varphi_5+\ldots)<(3\varphi_3+4\varphi_4+5\varphi_5+\ldots)$ или $3\Gamma<2P$, но по условию, $2P=20$, а $3\Gamma=21$; поэтому вывод, полученный при введенном нами предположении (граф плоский), противоречит условию. Отсюда заключаем, что полный граф с пятью вершинами не является плоским.

После сказанного можно сформулировать следующую теорему (теорема Понтрягина-Куратовского)

Теорема 4.2. **Граф является плоским тогда и только тогда, когда он не имеет в качестве подграфа полного графа с пятью вершинами или графа, о котором шла речь в задаче о печатной схеме.**

Теперь можно считать, что задача о печатной схеме решена полностью.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Разработать схему «полусумматора», т. е. устройства, которое может вычислять суммы вида

$$
\begin{array}{r} A_2 \\ + \; B_2 \\ \hline PS_2 \end{array}
\quad
\begin{array}{r} 1 \\ + \; 1 \\ \hline 10 \end{array}
\quad
\begin{array}{r} 1 \\ + \; 0 \\ \hline 01 \end{array}
\quad
\begin{array}{r} 0 \\ + \; 1 \\ \hline 01 \end{array}
\quad
\begin{array}{r} 0 \\ + \; 0 \\ \hline 00 \end{array}
$$

2. Разработать схему «умножителя», т. е. устройства, которое сможет вычислять произведение вида:

$$
\begin{array}{r} ab_2 \\ \times \; c_2 \\ \hline ? \end{array}
\quad
\begin{array}{r} 11 \\ \times \; 11 \\ \hline 11 \\ + \; 11 \\ \hline 1001 \end{array}
\quad
\begin{array}{r} 11 \\ \times \; 01 \\ \hline 11 \\ + \; 00 \\ \hline 11 \end{array}
\quad
\begin{array}{r} 11 \\ \times \; 10 \\ \hline 00 \\ + \; 11 \\ \hline 110 \end{array}
\quad
\begin{array}{r} 10 \\ \times \; 10... \\ \hline 00 \\ + \; 10 \\ \hline 100 \end{array}
$$

3. Составить схему автомата-отгадчика. Для угадывания предлагается 15 фамилий, размещенных в четырех столбцах. (Это одновременно задание на конструирование дешифратора у которого 4 входа и 15 выходов).

4. На рисунке 96 изображена функциональная схема устройства. Выяснить, какую работу выполняет устройство.

5. Утверждается, что устройство, схема которого изображена на рисунке 97, осуществляет сложение двухразрядных целых чисел (т. е. чисел положительных и отрицательных). Так ли это?

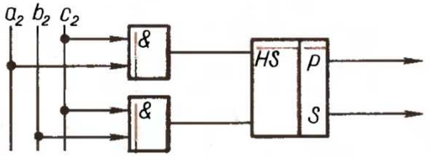


Рис. 96

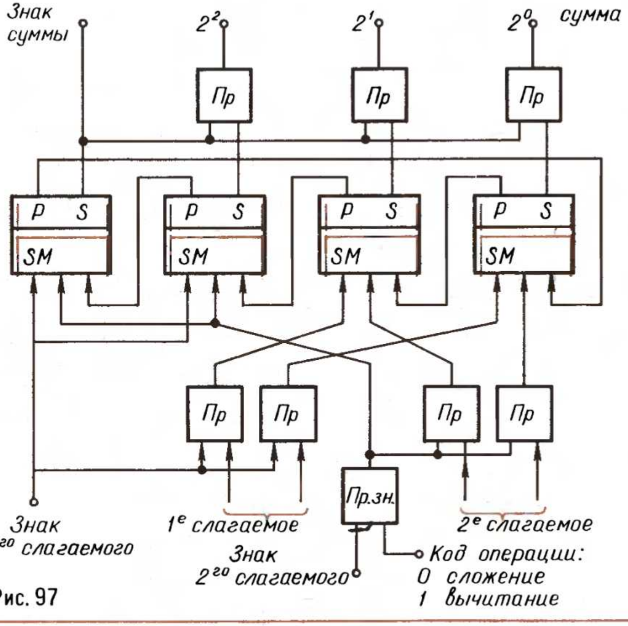


Рис. 97

6. Известно, что вместо трех различных логических элементов «И», «ИЛИ», «НЕ» можно использовать один комплексный элемент, так называемый «штрих Шеффера». Обозначается он так, как показано на рисунке 98, и выполняет со значениями A и B операцию $\overline{AB}$ —

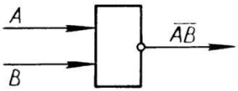


Рис. 98

Таблица 24

A	B	$\overline{AB}$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

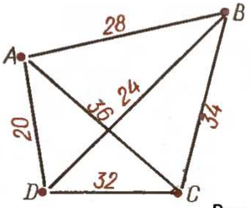


Рис. 99

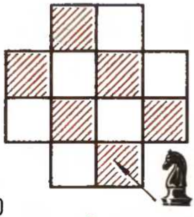


Рис. 100

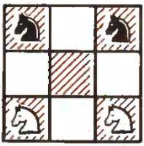


Рис. 101

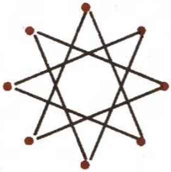


Рис. 102

«отрицание произведения», то есть работает в соответствии с таблицей 24:

Составьте, пользуясь только элементами «штрих Шеффера», устройство, эквивалентные элементам «И», «ИЛИ», и «НЕ». Этим будет доказано, что он один заменяет их все.

7. Вычертите функциональную схему двоичного арифметического устройства, которое обеспечивает вычисление значений функции $F(A, B, C) = A^2 + A(B+C) + BC$ при любых двоичных значениях A, B и C.

8. Коммивояжер из пункта A отправляется в поездку и намерен, посетив по одному разу пункты B, C и D, вернуться в A. Схема расположения пунктом задана неориентированным графом (рис. 99).

Утверждается, что ему безразлично в каком порядке объезжать эти пункты. Так ли это? Почему?

9. В розыгрыше футбольного кубка участвует 11 команд. Система соревнований — «олимпийская»: проигравшая один матч команда выбывает из дальнейших соревнований.

Составить расписание игр в виде граф-дерева так, чтобы после первого тура остались команды, которые за три тура определят победителя.

Какой вид будет иметь граф-расписание матчей?

Сколько матчей будет проведено с начала розыгрыша кубка?

10. Требуется обойти «ходом коня» все 12 клеток доски, изображенной на рисунке 100, причем в каждой клетке побывать по одному разу. Начинать и завершать обход можно на любой клетке, но обязательно на одной и той же.

11. Дана часть шахматной доски (рис. 101). На верхних угловых полях расположено по одному черному коню, на нижних — по одному белому.

Каким образом и за сколько ходов их можно поменять местами?

Дан граф (рис. 102). Положите шашку на любую из вершин графа и затем сдвиньте ее на любую из соседних. После того как ход закончен, прикасаться к этой шашке уже нельзя. Затем следует положить вторую шашку на любую еще не занятую вершину графа и вновь передвинуть ее в любую из соседних незанятых вершин.

Так следует действовать до тех пор, пока все семь имеющихся к началу игры шашек не займут своего места в вершинах графа.

В чем секрет успеха?

12. Три супружеских пары подошли к реке, где они нашли маленькую лодку, которая может поместить не более двух человек. Можно ли организовать переправу так, чтобы ни одна женщина не попала в лодку с мужчиной, не являющимся ее мужем? Как это сделать?

На рисунке 103 изображен граф, на котором указаны все варианты переправы. Часть информации, которая поможет разобраться в задаче, выписана рядом

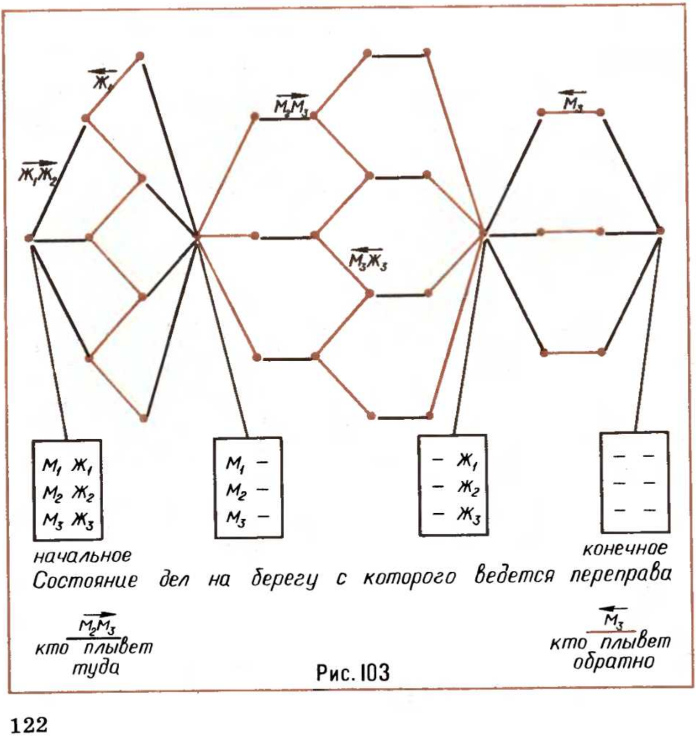


Рис. 103

с вершинами и ребрами графа. Рядом с вершиной в прямоугольнике описано состояние дел на берегу, с которого ведется переправа, а рядом с ребром указано, кто плывет в лодке (стрелка указывает направление движения).

Расставьте все указания к ребрам графа.

13. Четыре человека взялись выполнять работу маляра, слесаря, кузнеца и штукатура — каждый будет делать что-то одно.

Выяснилось, что:

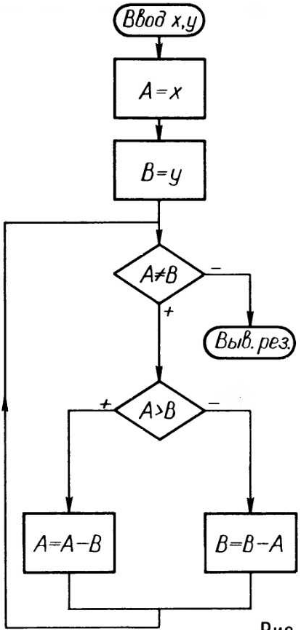


Рис. 104

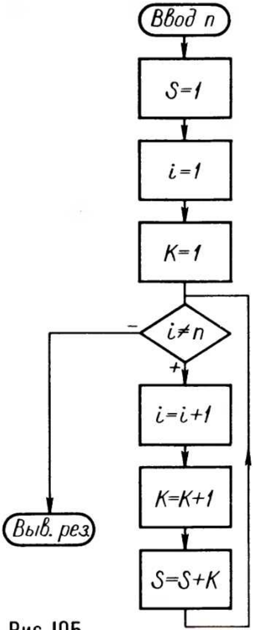


Рис. 105

Андреев не будет маляром и не будет слесарем;

Владимиров не будет кузнецом и не будет маляром;

Сергеев не будет слесарем и не будет маляром;

Дмитриев не будет слесарем и не будет кузнецом.

Известно также, что если Андреев не будет кузнецом, то Дмитриев не будет маляром.

Кто какую работу выполнял, если эти условия были выполнены? Задачу решить графически, составить граф-дерево.

14. Дана блок-схема алгоритма (рис. 104). Какой результат будет выведен по окончании работы, если $x=252$, а $y=108$?

15. Дана блок-схема алгоритма (рис. 105). Какой результат будет выведен по окончании работы, если $n=7$?

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

1. На рисунке 106 изображен полусумматор в виде «черного ящика», таблица, задающая его работу, и функциональная схема.

2. На рисунке 107 приведена функциональная схема умножителя двух двухразрядных двоичных чисел. В нее вошли 4 логических элемента «И», два полусумматора.

3. Функциональная схема автомата отгадчика приведена на рис. 108.

4. Устройство служит для вычисления значений выражения $(A+B)C$, если A, B и C принимают только значения 1 или 0.

5. Да, это схема устройства, которое может осуществлять сложение и вычитание двух двухразрядных чисел.

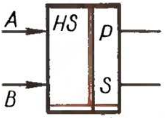
6. С помощью элемента «Штрих Шеффера» основные логические элементы моделируются так как показано на рисунке 109.

7. Схема устройства для вычисления значений выражения $A^2+A\,(B+C)+BC$ приведена на рисунке 110.

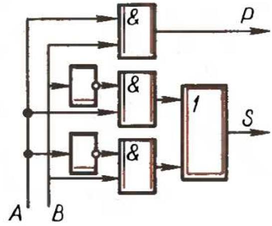
8. Да, это так, все маршруты имеют одинаковую протяженность — 120 км. Секрет в том, что все расстояния между городами составлены из чисел 11, 13, 15 и 21, которые во все расстояния вошли по два раза. Все это хорошо видно в таблице 25, задающей расстояния между пунктами.

9. Граф-расписание должен иметь вид, показанный на рисунке 111.

10. Выполнить это можно (рис. 112).



A	B	P	S
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0



Условное обозначение, таблица и функциональная схема полусумматора (HS)

Рис. 106

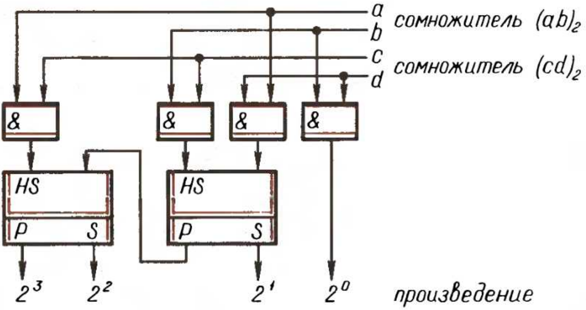


Рис. 107

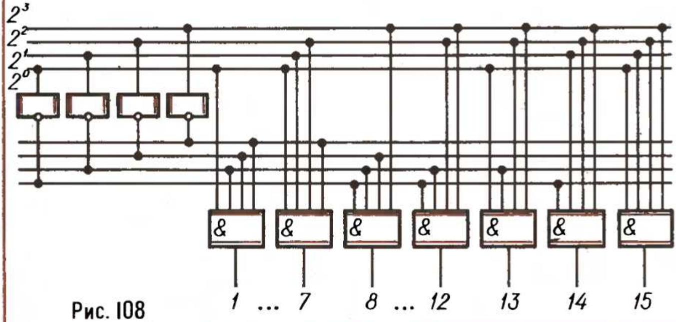


Рис. 108

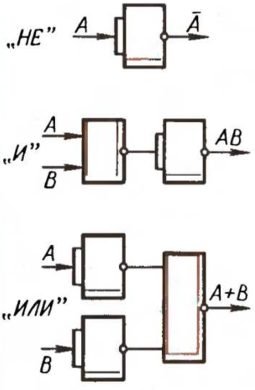


Рис. 109

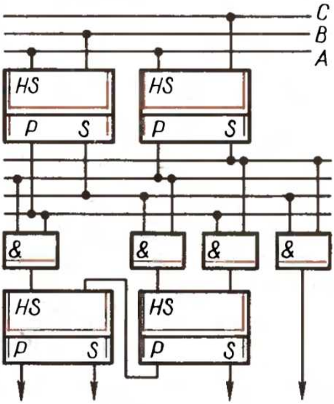


Рис. 110

Таблица 25

	A	B	C	D
A		13+15=28	15+21=36	11+15=26
B	28		13+21=34	11+13=24
C	36	34		11+21=32
D	26	24	32	

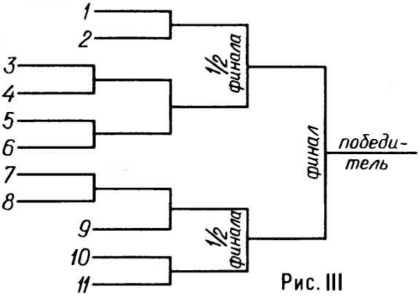


Рис. 111

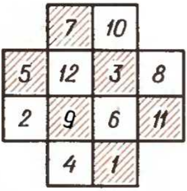


Рис. 112

СОДЕРЖАНИЕ

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

ВАЛЕНТИН НИКОЛАЕВИЧ КАСАТКИН

Необычные задачи математики

Редактор *О. П. Бондаренко*. Литературный редактор *Г. В. Брезницкая*. Художественный редактор *В. А. Пузанкевич*. Технический редактор *А. Г. Фридман*. Корректор *Л. В. Шуминская*.

Информ. бланк № 5000

Сдано в набор 03.02.87. Подписано к печати 17.06.87. БФ 28694. Формат $70 \times 100/32$. Бумага № 2. офсетн. Гарнитура шрифта школьная. Способ печати офсет. Условн.-печ. лист. 5,2. Условн. кр. отт. 10.4. Уч. изд. лист. 5,25. Тираж 150 000 экз. (I завод 1—75 000 экз.). Изд. № 30930. Зак. № 7—55. Цена 35 к.

Издательство «Радянська школа», 252053, Киев, Ю. Коцюбинского, 5.

Диапозитивы текста изготовлены на Головном предприятии РПО «Полиграфкнига».

Киевская книжная фабрика «Жовтень», 252053, Киев, Артема, 25.

35 к

Радянська школа